



**You have downloaded a document from
RE-BUS
repository of the University of Silesia in Katowice**

Title: Wykłady z topologii : topologia przestrzeni euklidesowych

Author: Jerzy Mioduszewski

Citation style: Mioduszewski Jerzy. (1994). Wykłady z topologii : topologia przestrzeni euklidesowych. Katowice : Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego



Uznanie autorstwa - Użycie niekomercyjne - Bez utworów zależnych Polska - Licencja ta zezwala na rozpowszechnianie, przedstawianie i wykonywanie utworu jedynie w celach niekomercyjnych oraz pod warunkiem zachowania go w oryginalnej postaci (nie tworzenia utworów zależnych).



UNIwersYTET ŚLĄSKI
W KATOWICACH



Biblioteka
Uniwersytetu Śląskiego



Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Jerzy Mioduszewski

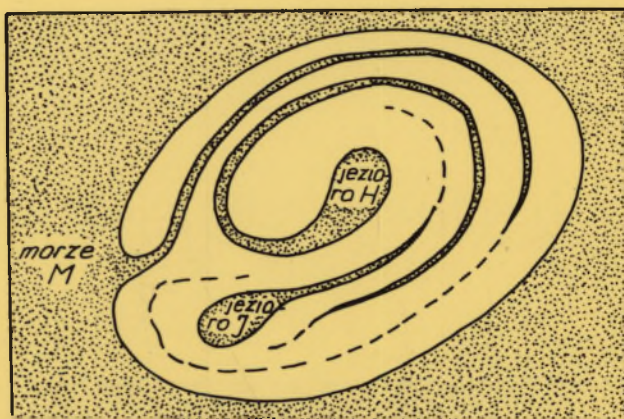
WYKŁADY Z TOPOLOGII

Topologia przestrzeni euklidesowych

Wydawnictwo
Uniwersytetu Śląskiego



Katowice 1994



Jerzy Mioduszewski

WYKŁADY Z TOPOLOGII

**Topologia przestrzeni
euklidesowych**



Redaktor serii: Matematyka

PIOTR WOJTYŁAK

Recenzenci

LECH GÓRNIOWICZ, HANNA PATKOWSKA

Publikacja dofinansowana

ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

TREŚĆ

OD AUTORA	7
WYKŁAD WSTĘPNY	11
Początki topologii: mosty królewieckie • Wzór Eulera • Bryły platońskie • Rola twierdzeń o rozcinianiu	
WYKŁAD 1.	21
Aksjomat Pascha • Topologia płaszczyzny • Twierdzenie Jordana-Dehna o rozcinianiu płaszczyzny przez łamaną zamkniętą • Twierdzenie o konfiguracji θ • Grafy niesplaszczalne • Twierdzenie Moore'a o triodach • Twierdzenie Schoenfliesa dla łamanych	
WYKŁAD 2.	41
Geometria analityczna przestrzeni euklidesowych • Sympleks • Współrzędne barycentryczne • Podział barycentryczny sympleksu • Pewne konfiguracje i odwzorowania wzorcowe • Triangulacje • Odwzorowania symplecjalne • Realizacje triangulacji w przestrzeniach euklidesowych • Twierdzenie o aproksymacji symplecjalnej • Spostrzeżenie Lebesgue'a	
ANEKS.	62
Twierdzenia o funkcjach i pokryciach • Lemat Urysohna • Twierdzenie Tietzego • Uogólnienie na wyższe wymiary • Twierdzenie Tietzego dla odwzorowań w sfery • Zmniejszanie zbiorów w pokryciach • Liczby Lebesgue'a dla pokryć • Kostka Hilberta	
WYKŁAD 3.	74
Twierdzenie o nieistnieniu retrakcji sympleksu na jego brzeg • Lemat Spernera • Przestrzenie euklidesowe różniące się wymiarami nie są homeomorficzne • Twierdzenie o zamocowaniu • Twierdzenie o zachowaniu otwartości • Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym • Twierdzenie Bohla • Twierdzenie Kuratowskiego-Steinhaus'a • O przestrzeniach mających własność punktu stałego	

WYKŁAD 4.	111
Pojęcie wymiaru pokryciowego • Wymiar sympleksu Δ^n jest równy n • Odwzorowania w nerw pokrycia • Twierdzenie Mengers-Nöbelinga o zanurza- niu w E^{2n+1} • Na temat teorii wymiaru	
WYKŁAD 5.	120
Homotopia odwzorowań • Przestrzeń ściągalne • Nieściągłość sfer • Typ homotopii przestrzeni • Odwzorowania w sfery: istotne i nieistotne • Lemat Borsuka o przedłużaniu homotopii • Twierdzenie o przedłużaniu odwzoro- wań nieistotnych • Odwzorowania istotne na kostki • Twierdzenia Łokuciewskiego i Holsztyńskiego o punktach incydencji • Przedłużanie odwzorowań w S^n z pod- zbiorów domkniętych wielościanów	
WYKŁAD 6.	140
Twierdzenia o rozcinianiu • Twierdzenie Borsuka o oddzieleniu punktu od nieskończoności • Twierdzenie Borsuka o rozcinianiu sfer • Twierdzenie Jordana-Brouwera • Jeszcze raz twierdzenie Brouwera o zachowaniu otwartości • Zbiór domknięty wymiaru $\leq n - 2$ nie rozcina sfery S^n	
WYKŁAD 7.	151
Powrót do twierdzenia Jordana o rozcinianiu płaszczyzny • Jeziora Wady • Twierdzenie Schoenfliesa • Nieprzenoszenie się twierdzeń schoenfliesowskich na przestrzeń trójwymiarową	
WYKŁAD 8.	164
Drogi i pętle • Ich dodawanie • Równoważność • Grupa podstawowa • Izomorfizmy grup wyznaczone przez drogi • Zależność od punktu wyróżnionego • Przestrzenie jednopójne • Homomorfizmy wyznaczone przez odwzorowania ciągłe • Punkt widzenia teorii kategorii	
WYKŁAD 9.	178
Pętle i drogi na okręgu • Nakrycie okręgu prostą • Podnoszenie dróg • Podnoszenie homotopii • Stopień pętli • Grupa podstawowa okręgu jest izomorficzna z grupą liczb całkowitych • Zastosowanie metody: dowód zasadniczego twierdzenia algebry • Twierdzenie Brouwera w wymiarze 2 • Nieistnienie retrakcji wstęgi Möbiusa na jej brzeg	
WYKŁAD 10.	187
Nakrycia — ogólnie • Twierdzenie o podnoszeniu dróg • Twierdzenie o podnoszeniu homotopii • O podnoszeniu odwzorowań: pewne kryterium • Nieistotność od- wzorowań $S^n \rightarrow S^1$ dla $n \geq 2$ • Przykład nakrycia: torus i płaszczyzna • Przykład przestrzeni o grupie podstawowej nieabelowej	
WYKŁAD 11.	199
Powierzchnia rzutowa • Sfera jako jej nakrycie • Grupa podstawowa powierzchni rzutowej • Odwzorowania zachowujące antypodyzm • Twierdzenie Borsuka-Ulama • Twierdzenie Lusternika-Sznirelmana • Twierdzenie o kanapce	

WYKŁAD 12.	208
Odwzorowania w S^1 • Metoda Eilenberga • Twierdzenia Janiszewskiego o rozcinianiu płaszczyzny • Jednosprzęgłość sfer S^n , $n \geq 2$	
WYKŁAD 13.	214
Twierdzenia o antypodach w dowolnym wymiarze • Lemat Tuckera • Twierdzenie Lusternika-Sznirelmana • Twierdzenie o nieistnieniu odwzorowań $S^n \rightarrow S^{n-1}$ zachowujących antypodyzm • Twierdzenie Borsuka-Ulana • Kilka twierdzeń związanych z poprzednimi	
WYKAZ SYMBOLI	221
WYKAZ NAZW	223
WYKAZ TWIERDZEŃ	226
AUTORZY	229

OD AUTORA

Czego nowego można się spodziewać po jeszcze jednej książce z topologii, a zwłaszcza poświęconej wielokrotnie i dobrze przedstawianym działom topologii przestrzeni euklidesowych? Zapewne niewiele i autor zdaje sobie sprawę z niewdzięcznego trudu, mimo to napisał książkę — przede wszystkim dla własnej potrzeby — ale wspomagany także niejawną zachętą słuchaczy jego wykładów, którzy bez specjalnej niechęci przyswajali tak pomyślany kurs topologii. Wykładając topologię przez wiele lat, autor nie musiał się już obawiać zarzutów o plagiat, pozwalając sobie w końcu na plagiat całkowity. Topologia przestrzeni euklidesowych jest dyscypliną ciekawą. Twierdzenia o punktach stałych, o antypodach, przykłady wspólnych brzegów itp. mają pozamatematyczne interpretacje (bo przecież nie zastosowania), o których się przyjemnie opowiada. Wykład ścisły uwidacznia jednak inny ich aspekt, a mianowicie dowody. Mają one swe źródło w geometrii, skąd poprzez „tricki” kombinatoryczne i aproksymację dochodzi się do sformułowań ciągłościowych. Na czym oszczędzić, by nie zmęczyć słuchacza, doprowadzając go jednak pełną dedukcją do twierdzeń końcowych? Trudności dowodowe dzielą się — ogólnie biorąc — na te, które należą do formalizmu i na wspomniane tricki dowodowe, których ten dział topologii ma sporo. Jedynie na tych pierwszych można oszczędzać, ale i tu autor nie ma zamiaru posuwać się aż tak daleko, aby na przykład uważać, że wszystkie, w racjonalny sposób określone, odwzorowania są ciągłe. Jeśli jednak dowód pomija, oznacza to, że ta zasada właśnie działa. Nie rozwija ani formalizmu przestrzeni liniowych (do opisu

kompleksów symplecjalnych), ani teorii grup (aby uzyskać kilka twierdzeń o grupie podstawowej). Ale nie oszczędza aż tak, by zamieszczać twierdzenia w ćwiczeniach. Wydaje się, że topologia przestrzeni euklidesowych jest na tyle interesująca, iż zamieszczanie dowodów nie oznacza nudy.

Oczywiście, niniejsza publikacja nie przygotowuje czytelnika do podjęcia aktualnych badań. Autor nie stawiał sobie tego celu, wiedząc, że obszar aktualnych badań jest odsunięty tak daleko, że nawet podwojenie ilości materiału nie przybliżyłoby doń w sposób istotny.

Topologię określa się zwykle jako ogólny dział geometrii zaniedbujący w widzeniu figur takie ich szczegóły, jak wielkość i tolerujący pewne zdeformowania nie zmieniające ich istotnego kształtu. Tak mniej więcej określał topologię Listing (1847), autor pierwszej książki jej poświęconej i jeszcze długo potem inni. Trudność w dokładnym określeniu przedmiotu topologii była zapewne przyczyną tego, że została ona wyodrębniona dość późno, mimo że o problemy topologiczne ocieramy się już w *Elementach*. Topologię zapoczątkował Euler i wychodząc z niezależnych od Eulera motywacji Gauss. Od Gaussa rozwija się już nieprzerwanie.

Teoria mnogości, która w końcu XIX wieku weszła do matematyki, zmieniła — i to w załączku — kierunek rozwoju topologii. Obiektami topologii stały się obok figur geometrii również i figury rozumiane jako zbiory punktów i odwzorowania ciągłe tych figur. Było to zasadnicze poszerzenie zakresu, a przy tym i zmiana konwencji. Nie od razu było wiadomo, czy konwencja mnogościowa wytrzyma próbę w postaci spełnienia pewnych warunków wstępnych. Prace Brouwera z lat 1909—1913 rozstrzygnęły tę wątpliwość w sposób zadowalający, ukazując możliwość rozróżnienia metodami mnogościowymi przestrzeni euklidesowych różniących się wymiarami.

Twierdzenia biorące początek z tego cyklu prac Brouwera — w postaci nadanej im później przede wszystkim przez Spernera, Aleksandrowa i Borsuka — stanowią główny przedmiot tej książki.

Są one powiązane ze sobą wielorakimi sposobami, ale istota geometryczna twierdzeń jest ześrodkowana w niewielu punktach. Odkryciem Spernera był lemat kombinatoryczno-geometryczny, który należy uznać za punkt newralgiczny teorii, zgodnie z przekonaniem, że u podstaw twierdzeń topologicznych konwencji mnogościowej leżą twierdzenia finitystyczne. Lemat Spernera jest naturalnym — jak się okazuje — środkiem w dowodzie twierdzenia o nieistnieniu retrakcji kuli euklidesowej na swój brzeg, twierdzenia znanego jeszcze Bohlowi i Brouwerowi, a którego rolę uwidoczniała teoria retraktów Borsuka. Z kolei to twierdzenie pociąga za sobą twierdzenie o topologicznym charakterze wymiaru sympleksu, którego istotą jest twierdzenie Spernera „o zamocowaniu”, nazwane tu tak dlatego, że rozważane w nim pokrycie sympleksu zbiorami otwartymi idącymi od naroży ku ścianom przeciwnym daje się zamocować jednym punktem w ten sposób, jak zamocowuje się kartki papieru jednym nakłuciem szpilki.

Przy okazji tego twierdzenia pojawia się wykład, w istocie dygresja, na temat teorii wymiaru pokryciowego, którego idea pochodzi od Lebesgue'a. Dalszy ciąg stanowią twierdzenia o rozcinaniu przestrzeni euklidesowych dowiedzione mniej więcej w tym samym czasie — różnymi metodami — przez Aleksandrowa i Borsuka, przedstawione w elementarnym ujęciu Borsuka. Twierdzenie „o zachowaniu otwartości” jest w tym cyklu twierdzeń być może najważniejsze. Nie pomijamy wniosków w postaci twierdzeń o punktach stałych, chociaż nie stanowią one w tym ujęciu koniecznego ogniwa w ciągu wynikań. Twierdzenie Jordana o rozcinaniu płaszczyzny przez łamaną zamkniętą zaczyna te wykłady, a ogólna wersja tego twierdzenia je zamyka.

Nie używa się środków algebraicznych poza tymi, które są potrzebne do wyłożenia teorii grupy podstawowej w zakresie kilku ważniejszych krzywych i powierzchni. Po wprowadzeniu ogólnego pojęcia nakrycia szczegółowiej jest omawiana powierzchnia rzutowa, między innymi w tym celu, by dowieść twierdzenia Borsuka-Ulama o antypodach w wymiarze 2. Lemat kombinatoryczny Tuckera, sferyczna specjalizacja lematu Spernera, są wykorzystywane w jednym z końcowych wykładów do dowodu twierdzenia o antypodach w wymiarze dowolnym.

Rozdział wstępny jest poświęcony początkom topologii. Autor musi przyznać, że miał trudności powiązania tego rozdziału z całością, bo pamiętajmy, że topologia powstawała w bogatym dla matematyki wieku dziewiętnastym i rozwijała się na uboczu jej głównych dyscyplin, czerpiąc z nich motywacje. Własną logikę początkowego rozwoju topologii dostrzega się z trudem lub dorabia się *ex post*. Do tych motywacji *ex post* należy nie istniejące historycznie powiązanie jej poprzez aksjomat Pascha z geometrią Euklidesa, ukazujące wzorzec i źródło twierdzeń o rozcinaniu przestrzeni euklidesowych.

Wykłady zatrzymują się w miejscu, w którym zaczyna się pojawiać potrzeba wyróżnienia orientacji przestrzeni. Jeszcze kilka kroków można by zrobić, nie wchodząc na drogę ogólnie przyjętej algebraizacji, ale już samo pojęcie orientacji — w istocie wyznacznika — nawet bez wchodzenia w algebraizację — byłoby zapoczątkowaniem nowego wątku.

Autor dziękuje słuchaczom wykładów, studentom kilku roczników matematyki, którym zawdzięcza zachętę do wykończenia rozproszonego tekstu. Zachętę tym cenniejszą, że czas nie jest dla topologii sprzyjający. Ciągłościowe widzenie matematyki ustępuje nowemu. Topologia też się przeobraża. Twierdzenia pozostają niezmiennie prawdziwe, ale ich los jest nierówny: jedne nabierają nowych znaczeń, inne idą w zapomnienie.

* * *

Zakończenie pracy było możliwe dzięki uzyskaniu grantu Uniwersytetu Śląskiego na tzw. badania własne.

Autor pragnie gorąco podziękować Recenzentom, którzy okazując wielką wyrozumiałość dla licznych drobnych usterek i uchybień technicznych przedstawionego im tekstu, zwrócili jednocześnie uwagę na istotne luki i przykre pomyłki natury matematycznej, dzięki czemu jest ich teraz zasadniczo mniej. Dużą pomocą dla autora była zachęta Profesora Piotra Wojtyłaka, dyrektora Instytutu Matematyki Uniwersytetu Śląskiego i jednocześnie kierującego sprawami wydawniczymi Instytutu, która niemal zobowiązywała do sfinalizowania pracy.

W niełatwym końcowym etapie pracy wielką pomocą dla autora była współpraca z Panią Redaktor Grażyną Wojdałą. Z wielką starannością, trafiając w intencje autora, wykonała rysunki Pani Barbara Hakert.

WYKŁAD WSTĘPNY. Początki topologii: mosty królewieckie • Wzór Eulera • Bryły platońskie • Rola twierdzeń o rozcinianiu

„Obok tej gałęzi geometrii, która jest związana z wielkościami i która zawsze skupiała uwagę badaczy, jest jeszcze inna jej gałąź, prawie nieznana, którą pierwszy zauważył Leibniz i nazwał geometrią położenia.”

Leonard Euler⁽¹⁾

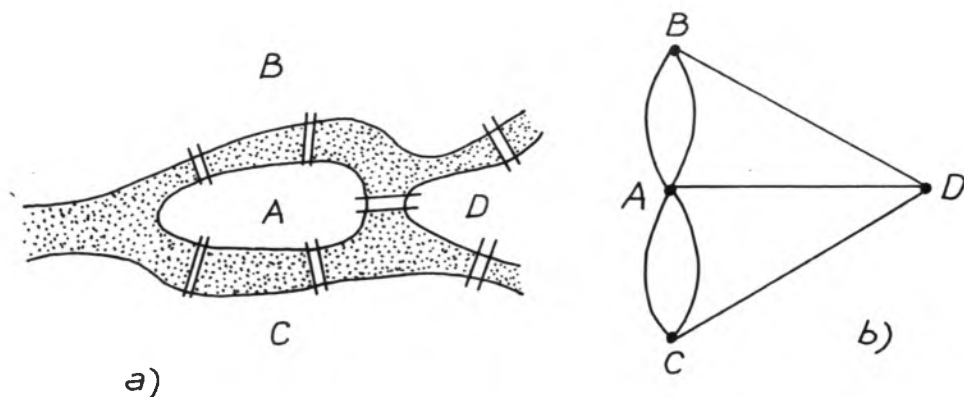
Zacytowane zdanie pochodzi z pracy Eulera (1736) o mostach królewieckich, zawierającej rozwiązanie pierwszego znanego zadania z dziedziny nazywanej później *topologią*. Czy ten właśnie rodzaj zadań miał na myśli Leibniz, pisząc o *geometrii położenia*, nie wiadomo, bo swoje zamysły wyraził bardzo ogólnie⁽²⁾.

A oto zadanie, którym zajął się Euler: „W Królewcu, w Prusach, jest wyspa *A* zwana *Kneiphof*. Na rzece, która ją opływa...” jest siedem mostów rozmieszczonych tak, jak pokazuje mapka na rys. 1(a). Czy można przejść po tych mostach w ten sposób, by każdy z nich przechodzić jeden raz?

Zadanie w oczywisty sposób tłumaczy się jako zadanie o możliwości przejścia po krzywej zamieszczonej na rys. 1(b) tak, by po każdym jej łuku przechodzić jeden raz.

⁽¹⁾ Leonhard Euler, *Solutio problematis ad geometria situs pertinentis*, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 8 (1736), 128—140; zdanie z części wstępnej.

⁽²⁾ Wzmianka Leibniza o *geometria situs* pochodzi z jego listu do Huygensa. Była ona na tyle niejasna, że Huygens jej nie zrozumiał, a na idee Leibniza powoływali się nie tylko twórcy późniejszej topologii, lecz także twórcy geometrii rzutowej, wśród nich Carl Georg Christian von Staudt, nazywając swoją dyscyplinę *Geometrie der Lage*. Patrz na ten temat szerzej u P. Juskiewicza, *Istoria matematyki*, t. II, Moskwa 1970, s. 126—127. Mimo to wzmianka Leibniza miała duży wpływ na rozwój topologii. Powoływał się na nią również Gauss.



Rys. 1. Czy paląc za sobą mosty, można przejść po wszystkich? Węzły krzywej (b) odpowiadają dzielnicom łączonym przez mosty (a), które na krzywej są reprezentowane przez nie przecinające się łuki

Krzywa składająca się ze skończenie wielu łuków, połączonych jedynie w swoich końcach, jest nazywana *grafem*. Jeśli po grafie można przejść tak, że po każdym jego łuku przechodzi się jeden raz, to nazywa się go *unikursalnym*.

Końce łuków grafu są nazywane *węzłami*. Przez *rzęd* wężła rozumie się ilość schodzących się w nim łuków.

Pokażemy za Eulerem, że graf z rys. 1(b) nie jest unikursalny, co będzie znaczyło, że zadanie o mostach królewieckich rozstrzyga się negatywnie.

Graf na rys. 1(b) ma cztery węzły. Jeden z nich, węzeł A odpowiadający wyspie A, jest rzędu 5 (wychodzi zń 5 łuków). Pozostałe są rzędu 3.

Jeśli idąc wzdłuż grafu mijamy węzeł, to przechodzimy przez dwa łuki wychodzące z tego węzła. Zatem, jeśli nie przeszliśmy żadnego łuku dwa razy i przeszliśmy je wszystkie, to wszystkie węzły grafu musiały być rzędu parzystego, z wyjątkiem być może dwu: tego, z którego wyszliśmy i tego, do którego wróciliśmy. Jeśli nie wróciliśmy do węzła, z którego wyszliśmy, to oba te węzły musiały być rzędu nieparzystego. Jeśli zaś wróciliśmy do węzła, z którego wyszliśmy, to ten węzeł musiał być rzędu parzystego.

Wykazaliśmy więc, że

(1) *Jeśli graf jest unikursalny, to wszystkie jego węzły, lub wszystkie z wyjątkiem dwu, są rzędu parzystego.*

Zatem, zaplanowany spacer po mostach Królewca się nie uda, ponieważ graf z rys. 1(b) nie spełnia warunku z (1), mając cztery węzły rzędu nieparzystego.

Prawdziwe jest twierdzenie odwrotne⁽³⁾, trudniejsze, które orzeka, że

⁽³⁾ Euler wypowiedział twierdzenie odwrotne, ale nie dał dowodu. Dowiódł twierdzenia C. Hierholzer, *Über die Möglichkeit, eine Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren*, *Mathematische Annalen* 6 (1873), 30—32. Dowód Hierholzera jest najczęściej przytaczany w literaturze, między innymi przez W. Lietzmanna, *Anschauliche Topologie*, München 1955 (na s. 68). Inny dowód: Stewart Scott Cairns, *Introductory Topology*, New York 1961, s. 5.

(2) *Jeśli wszystkie węzły grafu spójnego, lub wszystkie z wyjątkiem dwu, są rzędu parzystego, to graf jest unikursalny.*

Dla objaśnienia: graf jest nazywany *spójnym* wtedy, gdy nie rozpada się na dwa grafy rozłączne; oczywiście, *graf unikursalny musi być spójny*, bo spójny musi być każdy graf, który można przejść w jakikolwiek sposób.

Dowód twierdzenia. Jeśli graf ma wolne końce — a ma je wtedy tylko dwa — to łącząc je ze sobą, dostaniemy graf bez wolnych końców. Znajdując przejście unikursalne po tak otrzymanym grafie, w oczywisty sposób dostaniemy przejście unikursalne po danym grafie.

Dowód wystarczy więc prowadzić dla grafów nie mających wolnych końców.

Twierdzenie jest w oczywisty sposób prawdziwe dla grafów bez węzłów: jest tylko jeden tego rodzaju graf — *okrąg*.



Rys. 2. Okrąg jest grafem unikursalnym; formalnie biorąc, dodając nowe punkty podziału, dostajemy inny graf, ale na unikursalność nie ma to wpływu

Dowód będzie więc przeprowadzony, jeśli unikursalność grafu mającego węzły rzędu większego niż 2 (bez wolnych końców) i spełniającego założenia z (2), wyprowadzimy z unikursalności grafu o mniejszej sumie rzędów i spełniającego nadal (2).

Tego rodzaju redukcję da się przeprowadzić.

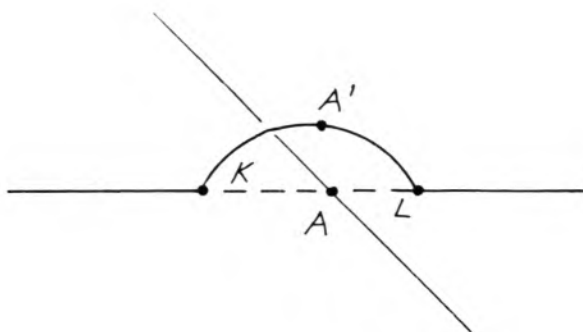
Rozważmy mianowicie graf spójny i jego węzeł A rzędu większego niż 2. Niech K i L będą dwoma łukami, schodzącymi się w A , takimi, że po ich usunięciu graf pozostaje spójny.

Usuńmy łuki K i L z grafu, nie usuwając ich końców. Utwórzmy z nich jeden łuk, łącząc je nowym punktem A' w miejscu, gdzie były złączone punktem A i połączmy go z grafem końcami w miejscu dawnych połączeń. Wygląda to tak, jak byśmy podnieśli łuk będący sumą łuków K i L ponad węzeł A , tworząc mostek przechodzący przez A' (rys. 3).

Powstaje graf spójny, który ma w węźle A rząd o 2 mniejszy; dołączony punkt A' nie jest traktowany jako węzeł.

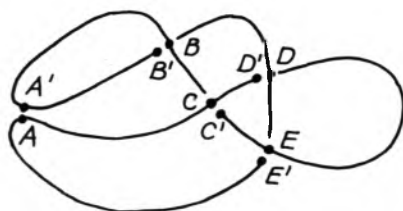
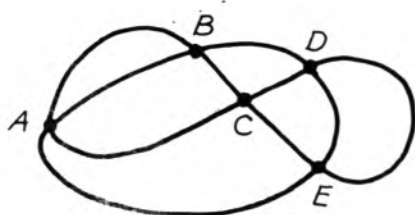
Ponieważ rząd w A zmniejsza się o liczbę parzystą, więc nowy graf nadal będzie spełniał warunki z (2). Łatwo widzieć, że przejście unikursalne po nowym grafie wyznaczy przejście unikursalne po grafie danym.

Aby zakończyć dowód, zauważmy, że w każdym węźle grafu spójnego, bez wolnych końców i spełniającego założenia z (2) i którego rząd jest większy niż 2, można znaleźć dwa łuki K i L schodzące w tym węźle, po których usunięciu graf pozostaje spójny.



Rys. 3. Łuk $K \cup L$ przechodzący przez węzeł A zostaje zastąpiony mostkiem przechodzącym przez punkt A' leżący „nad” A

Jeśli węzeł nie rozcina grafu, wystarczy wziąć za K i L jakiekolwiek dwa łuki schodzące się w tym węźle. Jeśli zaś węzeł rozcina graf, należy wziąć za K i L jakiekolwiek dwa łuki leżące w różnych częściach, na które rozpada się graf.



Rys. 4. Zadanie o przechodzeniu mostów jest tym samym, co zadanie o możliwości zbudowania wiaduktów nad ulicami, tak by utworzyły jezdnię bez samoprzecięć. Krzywa z rysunku po lewej ma same punkty podwójne i wiadukty udało się zbudować w ten sposób, by przejazd odbywał się na przemian „górą” i „dołem”⁽⁴⁾

* * *

W rozumowaniu prowadzącym do rozstrzygnięcia zadania o mostach królewieckich nieistotne były takie szczegóły geometryczne jak: długość łuków łączących węzły, ich zakrzywienie itp. Natomiast istotne było przecinanie lub nieprzecinanie się tych łuków. Dlatego zadanie o mostach zaliczył Euler do tego ogólnego działu geometrii, któremu nadał nazwę *geometria situs* — *geometria położenia*. Nazwy *topologia* pierwszy użył

⁽⁴⁾ Dowodowi możliwości naprzemiennego przejścia — raz górą, raz dołem — krzywej zamkniętej z samymi punktami podwójnymi, poświęcają jeden z rozdziałów (10) swojej książki — z powołaniem się na Gaussa — H. Rademacher i O. Toeplitz, *O liczbach i figurach*, Warszawa 1956 (tłum. z niem., Berlin 1933).

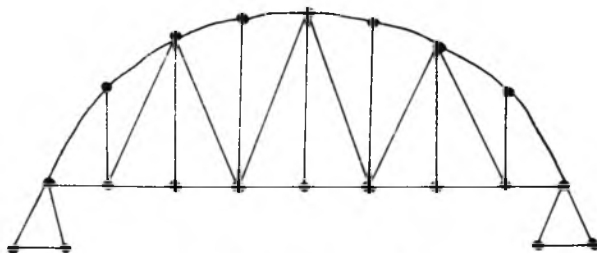
Listing, 1847⁽⁵⁾. Była to grecka wersja terminu *analysis situs* — jeszcze jednej nazwy nowo powstającej dyscypliny.

* * *

Rozważmy graf spójny położony na płaszczyźnie. Jeśli przez p oznaczymy ilość obszarów, na które ten graf rozcina płaszczyznę, wliczając w to także obszar zewnętrzny — nieograniczony, przez w ilość węzłów, a przez k ilość łuków grafu, to zawsze będzie

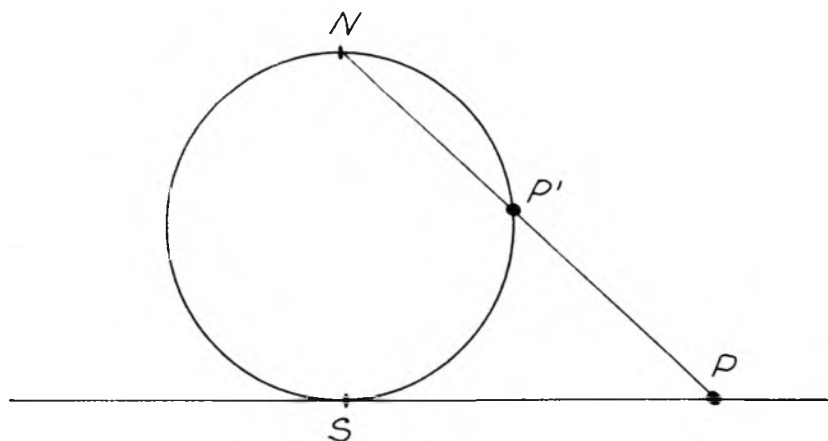
$$w - k + p = 2.$$

Jest to słynny wzór *Eulera*.



Rys. 5. $20 - 35 + 17 = 2$

Zamiast płaszczyzny można mieć na myśli powierzchnię sfery, która powstaje z płaszczyzny przez dodanie punktu w nieskończoności.



Rys. 6. Rzut stereograficzny

⁽⁵⁾ Johann Benedykt Listing jest autorem pierwszej książki o topologii, zatytułowanej *Vorstudien zur Topologie*, wydanej w 1847 roku w Getyndze. Listing i Möbius (odkrywcę wstęgi Möbiusa) byli w kierunku *geometria situs* inspirowani przez Gaussa; patrz P. Juszkievicz i N. Kołmogorow, *Matematyka XIX wieku*, Moskwa 1981.

Rysunek pokazuje sposób, w jaki można zobaczyć płaszczyznę jako sferę bez jednego punktu za pomocą rzutu *stereograficznego*. Płaszczyzna jest styczna do sfery w jej biegunie południowym S . Widać odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną $P \rightarrow P'$ między punktami płaszczyzny i sfery pozabawionej bieguna północnego N .

Wzór Eulera jest prawdziwy dla dowolnego grafu spójnego, położonego na płaszczyźnie, nawet jeśli dopuści się krzywoliniowość łuków. Ale jest to ogólność dana później temu wzorowi. Sam Euler rozpatrywał jedynie grafy prostoliniowe, a dokładniej konfiguracje tworzone przez wierzchołki, krawędzie i ściany wielościanów wypukłych. W odróżnieniu od twierdzenia o mostach królewieckich traktował swój wzór jako twierdzenie geometrii elementarnej⁽⁶⁾.

Szkic dowodu wzoru Eulera. Wzór jest prawdziwy w sposób oczywisty dla grafów o prostej budowie, na przykład redukujących się do jednego węzła lub jednego łuku; jest także prawdziwy dla grafu złożonego z trzech łuków stanowiących obwód trójkąta (rys. 7).



Rys. 7. Dla tych grafów wzór Eulera jest oczywisty: $1 - 0 + 1 = 2$,
 $2 - 1 + 1 = 2$, $3 - 3 + 2 = 2$

Dalszy dowód przebiega indukcyjnie: każdy graf można uważać za powstały z grafu o mniejszej ilości łuków przez dołączenie jednego.

Jeśli dołącza się łuk tak, że jeden jego koniec pozostaje wolny, to ilość obszarów w dopełnieniu grafu, a więc liczba p , nie zmienia się. Choćby liczby k i w wzrastają o 1 (por. rys. 8(a)), to liczba $w - k + p$ też się nie zmieni.

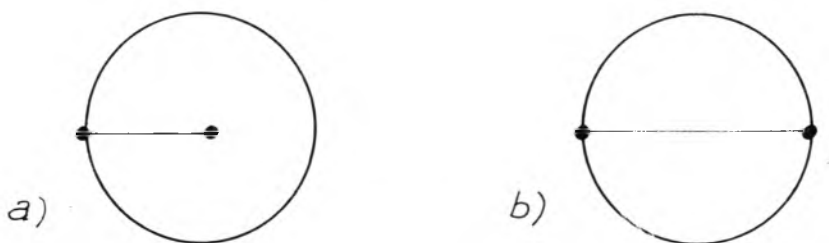
Jeśli łuk dołącza się tak, że oba jego końce stykają się z grafem, to ilość obszarów p wzrośnie o 1. Liczba k zwiększa się o 1, a liczba w pozostaje bez zmiany. Liczba $w - k + p$ będzie taka sama.

Dowód został zakończony.

W dowodzie — rzecz zrozumiała — były wykorzystane pewne własności geometryczne płaszczyzny. Już w pierwszym kroku posłużyliśmy się tym, że ani punkt, ani łuk nie rozcinają płaszczyzny, a krzywa zamknięta bez samoprzecięć rozcina płaszczyznę na dwa obszary.

⁽⁶⁾ Leonhard Euler, *Elementa doctrinae solidorum*, Novi Comm. Acad. Sc. Imp. Petr. 4 (1752/53), wyd. 1758, s. 109—140.

Na temat aspektów geometrycznych wzoru Eulera por. książkę Ju. A. Szaszkina, *Ejlerowa charakteristika*, Nauka, Moskwa 1989.



Rys. 8. Jeśli do koła dołączy się promień (a), nie dostaniemy nowego obszaru; dostaniemy, jeśli dołączymy średnicę (b)

W dalszej części dowodu skorzystaliśmy z tego, że łuk leżący w obszarze ograniczonym krzywą zamkniętą nie rozcina tego obszaru, jeśli ma z nią tylko jeden punkt wspólny (rys. 8(a)), rozcina zaś na dwa obszary (rys. 8(b)), jeśli ma oba końce na krzywej.

Te własności są tak oczywiste, że można by je przyjąć bez dowodu jako aksjomaty.

Mimo to wyprowadza się je z pewnych prostszych stwierdzeń. Jednym z nich jest — sformułowany w końcu ubiegłego wieku przez Pascha — aksjomat głoszący, że *prosta rozcina płaszczyznę na dwa obszary wypukłe*⁽⁷⁾. Twierdzenia o rozcinaniu płaszczyzny przez krzywą zamkniętą bez samoprzecięć — znanego jako twierdzenie Jordana — będziemy dowodzić, stopniując jego zakres prawdziwości, w dalszych wykładach.

* * *

Korzystając z wzoru Eulera, naszkicujemy zasadniczą ideę dowodu twierdzenia orzekającego, że jest tylko pięć wielościanów foremnych, mianowicie te, które znał jeszcze Platon: *czworościan, sześcián, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan*; są nazywane *bryłami platońskimi*.

Dowód, znany Euklidesowi, późniejszemu od Platona o dwa pokolenia, wieńczy jego *Elementy*⁽⁸⁾. Ale dowód uzyskany za pomocą wzoru Eulera

⁽⁷⁾ Moritz Pasch sformułował (1982) swój aksjomat (por. dalej wykład 1), nie używając pojęć mnogościowych, w języku geometrii aksjomatycznej, wypełniając w ten sposób jeden z poważniejszych braków *Elementów* Euklidesa.

Nazwa „aksjomat” (Pascha) wymaga wyjaśnienia. W ujęciu aksjomatycznym geometrii płaskiej aksjomat Pascha jest rzeczywiście aksjomatem. W późniejszych wykładach płaszczyznę będziemy traktować jako obiekt arytmetyczny — zbiór par liczb rzeczywistych — będący przedmiotem geometrii analitycznej. W tym ujęciu aksjomat Pascha jest twierdzeniem: prosta $ax+by+c=0$ rozcina płaszczyznę na dwa zbiory wypukłe $ax+by+c>0$ i $ax+by+c<0$.

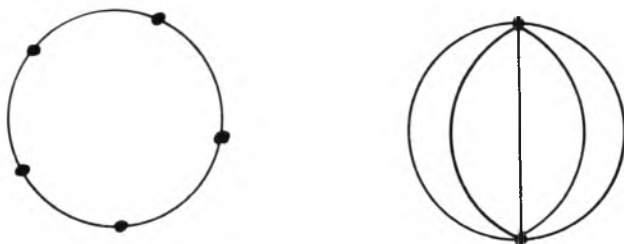
⁽⁸⁾ Euklides, *Elementy*, ks. XIII (§ 18a) (*Die Elemente von Euklid*, według Heiberga, Leipzig 1937): „Twierdzę, że poza opisanymi pięcioma bryłami żadna inna nie ma ścian będących figurami o tej samej ilości równych boków i równych kątów”. Nie dowodzimy tu aż tak silnego twierdzenia, ograniczając tezę do nieistnienia więcej niż pięciu *grafów* położonych foremnie na sferze. Czy

daje lepszy wgląd w problem, wskazując przy tym na możliwość ogólniejszego jego sformułowania.

Powiemy, że graf jest położony na sferze *foremnie*, jeśli:

- (a) każde z pól, na które graf rozcina sferę, ma tę samą ilość krawędzi, i
- (b) wężły grafu są wszystkie tego samego rzędu.

Oto przykłady tego rodzaju grafów na sferze.



Rys. 9. Grafy tu pokazane są w pewnym sensie trywialne: albo nie mają rozgałęzień, albo pola przez nie ograniczane nie są w ścisłym sensie wielobokami (dwuboku nie uważa się na ogół za wielobok)

Twierdzenie. *Na sferze jest jedynie pięć rodzajów grafów położonych foremnie, jeśli pominąć grafy trywialne; grafy te odpowiadają konfiguracjom węzłów, krawędzi i pól dla pięciu brył platońskich.*

D o w ó d. Rozważmy na sferze graf, którego wężły mają wszystkie ten sam rząd r , a pola w jego dopełnieniu są ograniczone tą samą ilością s łuków. Mnożąc ilość węzłów w przez r , dostaniemy ilość łuków liczonych dwukrotnie, tj. liczbę $2k$. Tę samą liczbę $2k$ dostaniemy, mnożąc ilość pól p przez s . Dostaniemy więc

$$wr = 2k \quad \text{i} \quad ps = 2k,$$

skąd

$$(3) \quad w = 2k/r \quad \text{i} \quad p = 2k/s.$$

Po podstawieniu do wzoru Eulera dostaniemy

$$(2k/r) + (2k/s) = k + 2,$$

skąd

$$(4) \quad (1/r) + (1/s) = (1/2) + (1/k).$$

postać grafu determinuje postać ścian bryły i postać samej bryły mającej ten graf jako konfigurację jej krawędzi? Odpowiedź jest twierdząca, ale pozostawiamy ją bez dowodu; por. wszakże wzmiankę przy okazji twierdzenia Schoenfliesa pod koniec wykładu 1.

Z tego wzoru wynika, że

$$(1/r) + (1/s) > 1/2.$$

Stąd, jeśli interesują nas jedynie nietrywialne rozwiązania, tj. takie, gdzie r i s są co najmniej 3 (te tzw. trywialne przedyskutujemy później), to jedynymi tego rodzaju rozwiązaniami równania (4) mogą być pary liczb

$$(5) \quad r=3 \quad \text{ i } \quad s=3,$$

$$(6) \quad r=3 \quad \text{ i } \quad s=4,$$

$$(7) \quad r=4 \quad \text{ i } \quad s=3,$$

$$(8) \quad r=3 \quad \text{ i } \quad s=5,$$

$$(9) \quad r=5 \quad \text{ i } \quad s=3$$

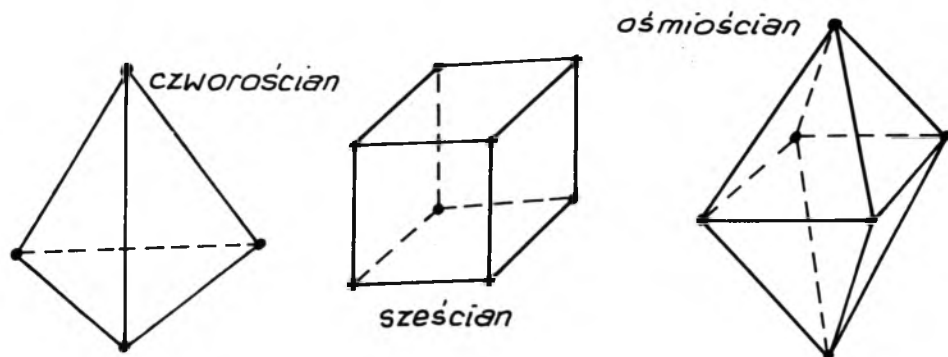
(w pozostałych przypadkach lewa strona nierówności nie przekracza $1/2$).

W przypadku (5) wzory (3) i (4) dają $k=6$, $p=4$ i $w=4$, co odpowiada konfiguracji czworościanu.

W przypadku (6) dostajemy $k=12$, $p=6$ i $w=8$, co odpowiada sześciannowi.

W przypadku (7) dostajemy $k=12$, $p=8$ i $w=6$, co odpowiada ośmiościanowi.

Konfiguracje te ilustruje rys. 10.



Rys. 10. Czworościan, sześcian i ośmiościan

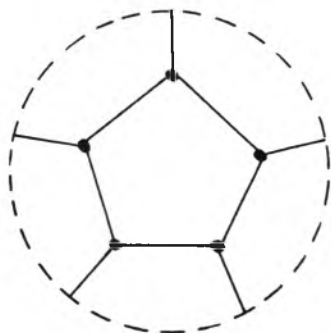
W przypadku (8) dostajemy

$$k=30, \quad p=12 \quad \text{ i } \quad w=20,$$

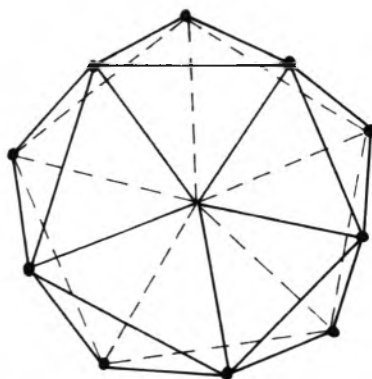
tj. liczby z konfiguracji dwunastościanu foremnego, a w przypadku (9)

$$k = 30, p = 20 \text{ i } w = 12,$$

tj. liczby z konfiguracji dwudziestościanu foremnego.



Rys. 11. „Połowa” dwunastościanu foremnego



Rys. 12. Połowa (widocznych) trójkątów składających się na dwudziestościan foremny

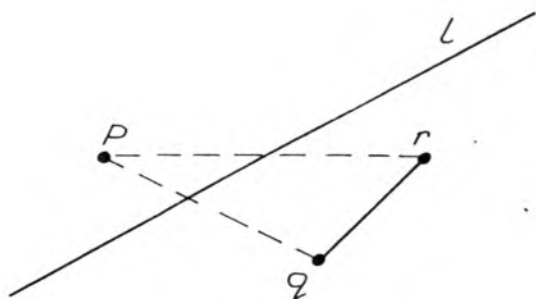
Jeśli $r = 2$, to graf ma postać taką, jak na rys. 9 po lewej. Jeśli $s = 2$, to graf ma postać taką, jak na rys. 9 po prawej. Jeśli $s = 1$, bądź $r = 1$, to graf redukuje się do wężła.

WYKŁAD 1. Aksjomat Pascha • Topologia płaszczyzny • Twierdzenie Jordana-Dehna o rozcinianiu płaszczyzny przez łamaną zamkniętą • Twierdzenie o konfiguracji θ • Grafy niesplaszczalne • Twierdzenie Moore'a o triodach • Twierdzenie Schoenfliesa dla łamanych

Podzbiór płaszczyzny jest nazywany zbiorem wypukłym, jeśli wraz z każdym z dwóch punktów zawiera łączący je odcinek.

Aksjomat Pascha. Prosta rozcina płaszczyznę na dwa zbiory wypukłe.

Te zbiory wypukłe są nazywane *półpłaszczyznami*; punktów prostej nie wlicza się do półpłaszczyzn.



Rys. 13. Aksjomat Pascha. Istnieją punkty p i q takie, że odcinek pq przecina prostą l . Każdy punkt r spoza l łączy się, oprócz l , za pomocą odcinka z jednym i tylko jednym spośród punktów p i q

Aksjomat Pascha, którego nie znał Euklides, jest podstawą do dalszych twierdzeń o rozcinianiu płaszczyzny. Nadaje sens zwrotom: „po tej samej stronie” i „po różnych stronach” prostej. Aksjomat Pascha został tu sformu-

lowany w konwencji mnogościowej; oryginalne sformułowanie mieści się w konwencji geometrii elementarnej⁽¹⁾.

Aksjomat Pascha może posłużyć — jeśli nie chcemy tego robić w konwencji arytmetycznej — do wyodrębnienia podzbiorów płaszczyzny nazywanych *otwartymi*, tj. do określenia tego, co nazywa się topologią płaszczyzny. Za otwarte uznamy wszelkie półpłaszczyzny, a co za tym idzie, przekroje skończenie wielu półpłaszczyzn i wszelkie sumy tego rodzaju przekrojów⁽²⁾.

Dopełnienia zbiorów otwartych są nazywane *domkniętymi*. Przykładem podzbiorów domkniętych płaszczyzny są proste.

Na prostych — za ich *podzbiory otwarte* — uznaje się przekroje tych prostych z podzbiorami otwartymi płaszczyzny. Ten zakres zbiorów otwartych na prostej pokrywa się z tym, który dostanie się, przyjmując za otwarte przedziały (bez końców) prostej i wszelkie ich sumy.

W ten sam sposób przenosi się pojęcie otwartości podzbioru i na inne zbiory położone na płaszczyźnie⁽³⁾.

Z dwóch prostych równoległych każda leży całkowicie w jednej z dwóch półpłaszczyzn, na jakie druga rozcina płaszczyznę⁽⁴⁾. Przez pas rozumiemy część wspólną nie zawierających się w sobie półpłaszczyzn, jakie powstają przez usunięcie z płaszczyzny dwóch prostych równoległych.

⁽¹⁾ Moritz Pasch sformułował swój aksjomat w *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882. U Davida Hilberta w *Grundlagen der Geometrie* znalazł się wśród aksjomatów grupy III, nazywanych aksjomatami porządku. O aksjomacie Pascha tak pisze Henri Poincaré (w *Dernière pensées*, wyd. ros. *O nauce*, Moskwa 1983, s. 448): „Co się tyczy aksjomatów porządku, to wydaje się, że są to najistotniejsze prawdy »analysis situs«”.

Aksjomat Pascha. Dane są na płaszczyźnie prosta l i punkty p i q spoza l takie, że odcinek pq przecina l . Jeśli r jest jeszcze jednym punktem spoza l , to dokładnie jeden z odcinków, rp lub rq , przecina l .

Jeśli przyjąć, że odcinek pq przecinający l w swoich punktach niekońcowych zawsze się znajdzie, to z tak sformułowanego aksjomatu wynika:

Twierdzenie. Prosta rozcina płaszczyznę na dwa zbiory wypukłe.

Dowód. Niech U będzie zbiorem tych punktów płaszczyzny, które można połączyć poza l odcinkiem z punktem p . Niech V będzie analogicznie określonym zbiorem dla punktu q . Z aksjomatu Pascha wynika, że zbiory U i V są rozłączne i że wypełniają dopełnienie prostej l .

Niech r i r' będą punktami zbioru U . Odcinki rp i $r'p$ nie przecinają prostej l . Dlatego rr' nie przecina l , co wynika z aksjomatu Pascha. Zatem, odcinek rr' jest zawarty w U . Dowodzi to wypukłości zbioru U . Na tej samej zasadzie zbiór V jest wypukły.

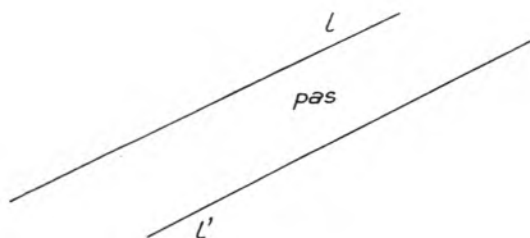
W tekście przyjęliśmy to twierdzenie jako aksjomat.

W modelu arytmetycznym (kartezjańskim) płaszczyzny aksjomat Pascha jest prostym twierdzeniem analitycznym. W następnych wykładach, dotyczących przestrzeni euklidesowych dowolnych wymiarów, przejdziemy do tego uproszczonego modelu arytmetycznego.

⁽²⁾ Pojęcia topologii formalnej (ogólnej) zakłada się jako znane, wystarczy zakres książki J. L. Kelleya *General topology*, Van Nostrand, New York 1955. Mimo to niektóre pojęcia są przypomniane (m.in. w przypisach), aby uniknąć wątpliwości co do ich ewentualnego rozmaitego rozumienia.

⁽³⁾ Na temat dziedziczenia się topologii na podzbiory (pojęcie podprzestrzeni) patrz: J. L. Kelley *General topology*..., s. 51.

⁽⁴⁾ W ścisłym dowodzie należy wziąć pod uwagę ciągłość uporządkowania punktów prostej, tj. jej spójność.



Rys. 14. Pas między prostymi l i l'

Przekrój dwóch pasów jest nazywany *równoległobokiem*, jeśli kierunki prostych z różnych par równoległych wyznaczających te pasy nie pokrywają się; jeśli te kierunki są prostopadłe, to jest on nazywany *prostokątem*.

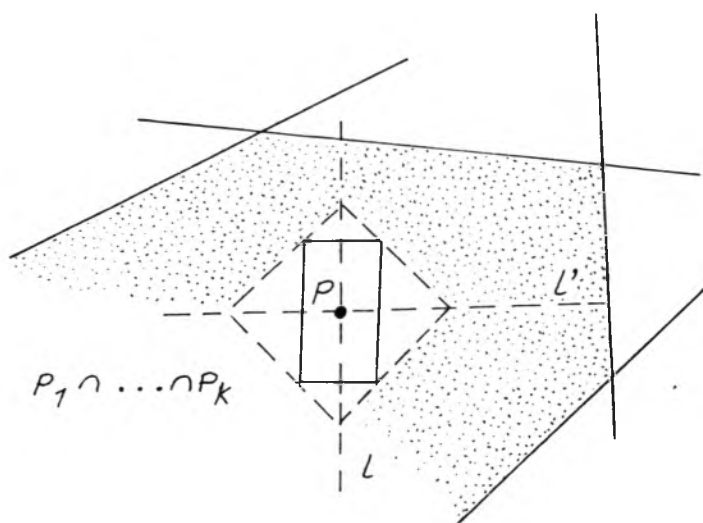
Równoległoboki są zbiorami wypukłymi jako przekroje półpłaszczyzn, które są zbiorami wypukłymi. Jako przekroje skończenie wielu zbiorów otwartych (czterech półpłaszczyzn) są podzbiorami otwartymi płaszczyzny.

Bazą zbiorów otwartych nazywa się każdą rodzinę zbiorów otwartych taką, że każdy zbiór otwarty jest sumą pewnych zbiorów tej rodziny. Bazę zbiorów otwartych płaszczyzny między innymi tworzy rodzina złożona z wszelkich przekrojów skończonych ilości półpłaszczyzn.

Prostokąty o ustalonym kierunku boku również tworzą bazę zbiorów otwartych płaszczyzny.

Dla dowodu wystarczy wykazać, że mając punkt p w przekroju $P_1 \cap \dots \cap P_k$ półpłaszczyzn, znajdzie się zawsze prostokąt R , którego boki są równoległe do dwu danych wzajemnie prostopadłych kierunków l i l' , i dla którego

$$p \in R \subset P_1 \cap \dots \cap P_k.$$



Rys. 15. Prostokąt wokół p wpisany w $P_1 \cap \dots \cap P_k$

Chcąc to wykazać, poprowadźmy przez punkt p proste o kierunkach l i l' i odłóżmy z punktu p na każdej z czterech półprostych wychodzących z tego punktu odcinki równej długości nie przecinające żadnej z prostych będących krawędziami półpłaszczyzn P_j . W tak powstały czworokąt — w istocie jest to kwadrat — łatwo wpisać prostokąt (nawet kwadrat) o żądanych własnościach.

* * *

Przez łamaną łączącą punkty p i q rozumiemy sumę odcinków

$$I_j = [a_j, a_{j+1}], \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

takich, że

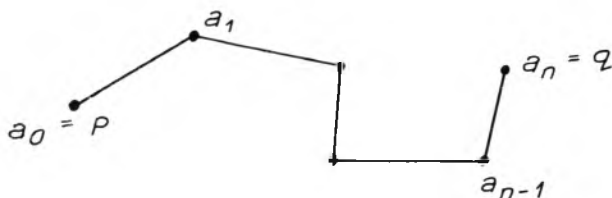
$$I_k \cap I_l \neq \emptyset \Leftrightarrow |k - l| \leq 1,$$

$$I_{j-1} \cap I_j = \{a_j\}$$

oraz

$$a_0 = p \text{ i } a_n = q.$$

Łamaną, złożoną z odcinków opisanych jak wyżej, będziemy oznaczać symbolem $a_0 a_1 \dots a_n$ lub krótszym symbolem pq , jeśli zależy nam jedynie na uwidocznieniu końców p i q łamanej.



Rys. 16. Łamana

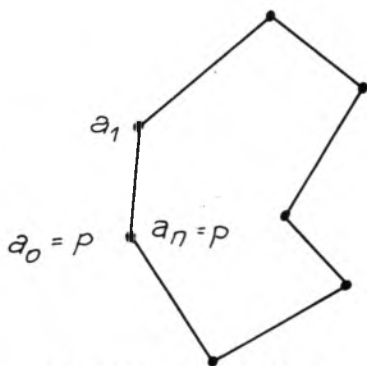
Jeśli dopuścić, by początek p łamanej pokrywał się z jej końcem q , to otrzymamy łamaną zamkniętą; łamana ta nie ma nadal samoprzecięć.

Łamane i łamane zamknięte są grafami.

Jako sumy skończonych ilości odcinków prostych, które są zbiorami zwartymi⁽⁵⁾, łamane są zbiorami zwartymi, a więc podzbiorami domkniętymi płaszczyzny. Ich dopełnienia są zbiorami otwartymi.

Łamane są zbiorami spójnymi, będąc sumami odcinków łączonych kolejno punktami.

⁽⁵⁾ Każde pokrycie zbioru zwartego podzbiorami otwartymi zawiera — na mocy określenia zwartości — pokrycie skończone. Na płaszczyźnie w innych przestrzeniach euklidesowych zbiory zwarte to zbiory domknięte i ograniczone.



Rys. 17. Łamana zamknięta

Przypomnijmy: zbiór jest nazywany *spójnym*, jeśli nie ma rozbicia na dwa zbiory niepuste i w nim otwarte. Prosta i jej odcinki są spójne.

Zbiór, którego każdy z dwóch punktów leży na zbiorze spójnym, jest spójny. W szczególności, spójny jest zbiór, którego każdy z dwóch punktów daje się połączyć łamaną. Stąd płaszczyzna i wszelkie jej podzbiory wypukłe są zbiorami spójnymi.

Podzbiory płaszczyzny, które jednocześnie są spójne i otwarte, nazywają się jej *obszarami*.

* * *

Przez *składową* zbioru rozumie się podzbiór spójny nie zawierający się w żadnym większym podzbiorze spójnym tego zbioru. Oczywiście, składowe są ze sobą rozłączne, jeśli nie są identyczne. Każdy punkt zbioru leży w jakiejś składowej w sumie wszystkich zbiorów spójnych, do których należy ten punkt. Stąd, każdy zbiór rozbija się na swoje składowe. Z tego, co było powiedziane, wynika, że takie rozbicie jest jedno.

Twierdzenie. Składowe zbiorów otwartych płaszczyzny są zbiorami otwartymi.

Dowód. Niech U będzie zbiorem otwartym płaszczyzny, a G jego składową. Niech $p \in G$. Wobec otwartości zbioru U pewien prostokąt P o środku p jest zawarty w U . Suma $G \cup P$, składowej G i prostokąta P , jest zbiorem spójnym, bo oba zbiory są spójne i mają punkt wspólny. Suma $G \cup P$ nie może być większa niż G , bo G jest składową. Znaczy to, że $P \subset G$.

Wykazaliśmy, że składowa G wraz z każdym punktem zawiera pewne otoczenie otwarte tego punktu (wnętrze geometryczne prostokąta o środku w tym punkcie), tj. otwartość składowej G .

Śledząc dowód, widzimy, że twierdzenie dotyczy nie tylko zbiorów otwartych płaszczyzny, lecz także innych przestrzeni, byleby takich, których każdy punkt miał dowolnie małe otoczenia spójne; tego rodzaju przestrzenie noszą nazwę *lokalnie spójnych*.

Podzbiory otwarte spójne przestrzeni topologicznej nazywa się (jej) *obszarami*.

Odnotujmy, że dla płaszczyzny i — ogólniej — dla przestrzeni lokalnie spójnych, rozbicia ich podzbiorów otwartych na składowe są tym samym, co rozbicia na obszary.

Istotnie, jeśli G jest jednym z obszarów, elementów danego rozbicia, to jako zbiór spójny zawiera się w pewnej składowej rozważanego zbioru. Ta skła-

dowa nie może być większa niż obszar G , bo inaczej miałaby rozbić na zbiór G i zbiór złożony z pozostałych jej punktów, który jest otwarty jako przekrój tej składowej z sumą pozostałych obszarów należących do rozbitcia.

Wynikanie odwrotne jest oczywiste.

Ponieważ rozbić na składowe jest jedno, z dowiedzonego twierdzenia dostajemy następujący

Wniosek. *Zbiór otwarty płaszczyzny i — ogólniej przestrzeni lokalnie spójnej — ma dokładnie jedno rozbić na obszary.*

Zbiór rozcina przestrzeń, w której leży, jeśli jego dopełnienie nie jest spójne, tzn. jeśli ma co najmniej dwie składowe.

W myśl tego, co już powiedzieliśmy o zbiorach na płaszczyźnie, jeśli podzbiór domknięty rozcina płaszczyznę, to na obszary-składowe swego dopełnienia; jeśli jest przy tym ograniczony, czyli zwarty, to — co łatwo widzieć — jeden z tych obszarów — i tylko jeden — jest nieograniczony.

Przez brzeg zbioru leżącego w przestrzeni topologicznej rozumiemy zbiór punktów tej przestrzeni, w których każdym otoczeniu są punkty zbioru i jego dopełnienia. *Brzeg zbioru jest zbiorem domkniętym. Brzeg zbioru otwartego jest rzadki (w przestrzeni, co znaczy, że względem tej przestrzeni ma wewnątrz puste) i jest rozłączny ze zbiorem.*

* * *

Wypukłość prostokątów, które stanowią bazę zbiorów otwartych płaszczyzny, wykorzystamy w dowodzie twierdzenia orzekającego, że w *obszarze płaskim każde dwa punkty można połączyć łamaną*. Dokładniej, prawdziwe jest:

Twierdzenie. *Jeśli G jest obszarem płaszczyzny i a jest punktem tego obszaru, to dla każdego punktu x obszaru G istnieje łamana zawarta w obszarze G mająca punkty a i x jako swoje końce.*

Dowód. Niech A będzie zbiorem punktów x obszaru G , które można z punktem a połączyć łamaną.

Zbiór A jest zbiorem niepustym, bo $a \in A$.

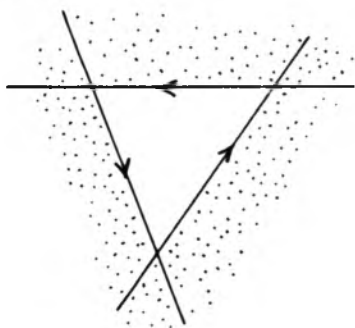
Zbiór A jest zbiorem otwartym. Jeśli bowiem $x \in A$, to biorąc pod uwagę prostokąt wokół x zawarty w G , stwierdzamy łatwo, że każdy punkt tego prostokąta, mając połączenie z punktem x za pomocą odcinka leżącego w tym prostokącie, ma również połączenie z punktem a łamaną.

Zbiór A jest domknięty w G , bo jeśli $x \in A$ i dowolnie blisko punktu x są punkty, które można z A połączyć łamaną, to takie punkty znajdują się w pewnym prostokącie wokół x zawartym w G . Łącząc ten punkt z odcinkiem x , dostaniemy łamaną łączącą a z x zawartą w G .

Musi być $A = G$, bo inaczej zbiór G rozpadłby się na dwa podzbiory w nim otwarte, niepuste, zbiory A i $G - A$, wbrew spójności G .

Powiemy, że zbiór skończony odcinków tworzy cykl, jeśli każdy odcinek tego zbioru ma punkty wspólne z dokładnie dwoma innymi odcinkami tego zbioru i oba końce odcinka są tymi punktami wspólnymi.

Odcinki łamanej zamkniętej tworzą cykl, ale pojęcie cyklu jest ogólniejsze. Suma odcinków cyklu nie musi być łamaną zamkniętą, chociaż jest zawsze sumą (skończoną) rozłącznych ze sobą łamanych zamkniętych.



Rys. 18. Łamana wypukła rozcina płaszczyznę na dwa obszary i jest ich wspólnym brzegiem

Rozważmy łamaną zamkniętą, która jest wypukła w tym znaczeniu, że proste będące przedłużeniami jej boków pozostawiają pozostałość łamanej w jednej półpłaszczyźnie. Przekrój wspomnianych półpłaszczyzn jest obszarem wypukłym w tym znaczeniu, że wraz z każdymi dwoma punktami zawiera odcinek je łączący. Suma pozostałych półpłaszczyzn jest również obszarem — nieograniczonym. Obszary są rozłączne, a łamana jest ich wspólnym brzegiem.

To proste twierdzenie jest szczególnym przypadkiem twierdzeń o rozcinianiu płaszczyzny przez łamane zamknięte (niekoniecznie wypukłe), do których sformułowania i dowodów teraz przystąpimy.

* * *

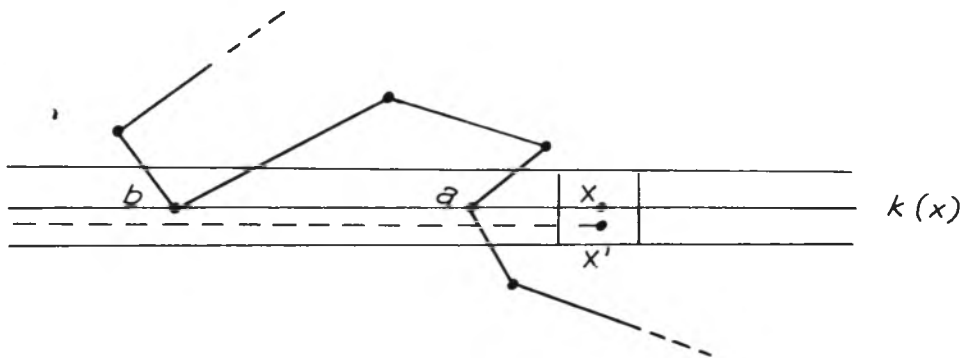
Niniejszy wykład jest poświęcony twierdzeniom o rozcinianiu płaszczyzny, wśród których centralną pozycję pełni⁽⁶⁾:

Twierdzenie Jordana-Dehna. *Łamana zamknięta rozcina płaszczyznę na dwa obszary i jest ich wspólnym brzegiem.*

⁽⁶⁾ W jednym z dalszych wykładów wrócimy znowu do twierdzeń o rozcinianiu płaszczyzny, ale już przez zbiory zwarte, niekoniecznie będące grafami, między innymi przez krzywe zwykle zamknięte. Twierdzenie o rozcinianiu płaszczyzny przez krzywą zwykłą zamkniętą bez samoprzecięć sformułował Jordan (Camille Jordan, *Cours d'analyse*, Paris 1893), ale dowód podany przez Jordana miał lukę. Za pierwsze poprawne dowody uważa się dowody Veblena (1905) i Brouwera (1910): L. E. J. Brouwer, *Beweis des Jordanschen Kurvensatzes*, *Mathematische Annalen*, 69 (1910), 169—175; w *Collected Works*, t. II, na s. 377—383, z komentarzami do dawniejszej literatury. Dowód Brouwera można znaleźć u Felixa Hausdorffa w *Grundzüge der Mengenlehre* (1914). Istotę dowodu twierdzenia Jordana ilustruje przypadek łamanej i pierwszy poprawny dowód dla tego szczególnego przypadku pochodzi od Dehna: Max Dehn, *Beiträge zur Analysis Situs, Prinzipien der Geometrie* (manuskrypt; dane za artykułem W. Magnusa, *Max Dehn*, *Mathematical Intelligencer* 1 (1978), 132—143).

Dowód⁽⁷⁾. Niech L będzie łamaną zamkniętą. Niech k będzie kierunkiem różnym od kierunków boków łamanej. Każdemu punktowi x nie leżącemu na L przypiszmy liczbę $\text{ind}_L(x)$, nazywaną dalej *indeksem punktu x względem L* , równą 0 lub 1, określoną jak następuje.

Przez punkt x prowadzimy prostą $k(x)$ o kierunku k i liczymy ilość modulo 2 punktów przecięcia łamanej L z prostą $k(x)$, leżących na lewo od x (zakładamy, że prosta ma zwrot, a przez odpowiedni obrót całej płaszczyzny kierunek k można uznać za poziomy). Przyjmujemy przy tym, że jeśli punkty przecięcia są wierzchołkami łamanej L , to liczymy je jedynie w tym przypadku, gdy prosta rozcina w nich łamaną lokalnie (sens temu powiedzeniu nadaje aksjomat Pascha).



Rys. 19. Punkt b nie jest liczony

Nie uwzględniamy w symbolu $\text{ind}_L(x)$ zależności od kierunku k , bo k będzie ustalone.

Traktujemy ind_L jako funkcję określoną na dopełnieniu łamanej L i przyjmującą wartości w zbiorze $\{0,1\}$.

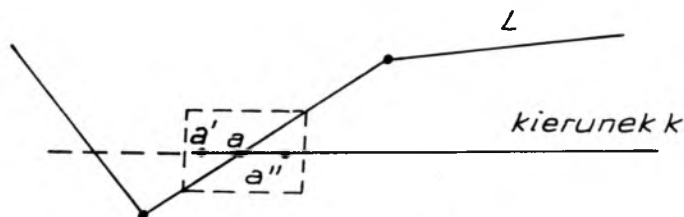
Funkcja ind_L przyjmuje obie wartości, 0 i 1.

Aby to zobaczyć, wystarczy wziąć jakąkolwiek prostą o kierunku k , przecinającą łamaną L w punkcie x nie będącym wierzchołkiem łamanej. Na tej prostej, w pewnym przedziale wokół punktu x , nie ma już innych punktów łamanej L niż x . W punktach tego przedziału leżących po różnych stronach punktu x indeks przyjmuje różne wartości.

Dopełnienie łamanej L rozpada się więc na dwa zbiory niepuste A i B , zbiór A złożony z punktów o indeksie 0 i zbiór B złożony z punktów o indeksie 1.

Zbiory A i B są otwarte.

⁽⁷⁾ Ten dowód zamieszczają R. Courant i H. Robbins w książce *Co to jest matematyka?* (s. 345—348 wydania polskiego z 1967 r.), oraz E. E. Moise w *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, Springer 1977, s. 16—25.



Rys. 20. $\text{ind}_L(a') \neq \text{ind}_L(a'')$

Wynika to stąd, że dla każdego punktu x spoza L istnieje prostokąt P wokół x taki, że $\text{ind}_L(x') = \text{ind}_L(x)$ dla $x' \in P$. Krócej: funkcja ind_L jest lokalnie stała.

W celu znalezienia zapowiedzianego prostokąta P weźmy najpierw prostokąt Q o środku x mający boki o kierunku k i rozłączny z L . Weźmy z kolei pas R wokół prostej $k(x)$ na tyle wąski, by nie było w nim innych wierzchołków łamanej L niż te, które leżą na $k(x)$ (por. rys. 19). Przekrój pasa R z prostokątem Q jest zapowiedzianym prostokątem P (oczywiste, ale dla łamanej z wolnymi końcami fałszywe!).

Dowiedliśmy w ten sposób, że dopełnienie łamanej L nie jest spójne, ponieważ rozpada się na dwa zbiory otwarte niepuste A i B . Dowiedliśmy więc, że łamana L rozcina płaszczyznę.

Zauważmy, że dla punktów zbioru spójnego indeks jest stały, inaczej ten zbiór rozpadłby się na dwa zbiory w nim otwarte, jeden złożony z punktów leżących w A i drugi złożony z punktów leżących w B .

Pokażemy, korzystając z ostatniej uwagi, że zbiory A i B są spójne. Wynika to z następującego bardziej szczegółowego stwierdzenia:

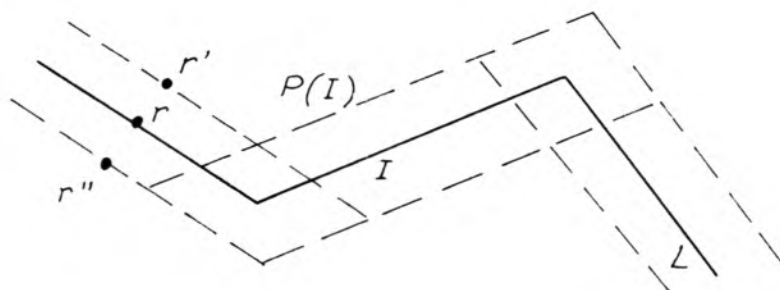
Istnieją punkty r' i r'' poza L takie, że każdy punkt spoza L może być połączony poza L łamaną z jednym z punktów r' i r'' .

Dla dowodu, weźmy na łamanej L punkt r nie będący jej wierzchołkiem i wystawmy w punkcie r prostopadłą do odcinka łamanej, na którym leży punkt r . Po obu stronach tego odcinka weźmy na tej prostopadłej punkty r' i r'' w równej odległości d od r .

Wzdłuż odcinków łamanej poprowadźmy pasy o szerokości $2d$ tak, by te odcinki znalazły się w środku pasów; w ten sposób punkty r' i r'' znajdują się na brzegu pasa wzdłuż odcinka, na którym leży punkt r .

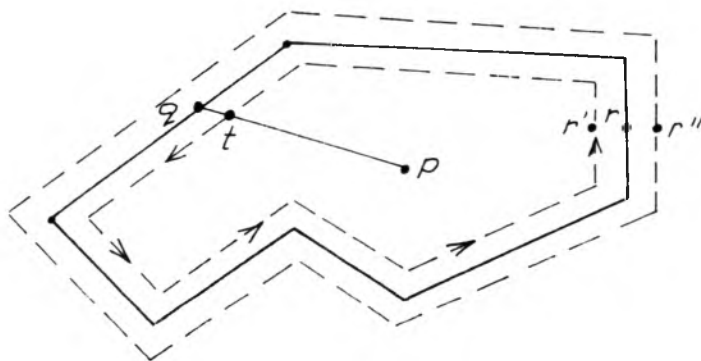
Przekrój pasów wzdłuż odcinków sąsiednich jest równoległobokiem o środku we wspólnym punkcie tych odcinków (por. rys. 21).

Załóżmy, że szerokość $2d$ pasów jest na tyle mała, że wspomniane równoległoboki, liczone wraz z brzegami, są rozłączne, a punkty r , r' i r'' leżą poza tymi równoległobokami. Jeśli I jest odcinkiem łamanej, to przez $P(I)$ oznaczmy część pasa wzdłuż I zakończoną dwoma równoległobokami — część



Rys. 21. Konstrukcja pasa wokół L

ciami wspólnymi z pasami wzdłuż odcinków sąsiednich. Nazwijmy $P(I)$ *segmentem* wokół I . Założenie o szerokości pasów zapewnia, że przecinają się ze sobą jedynie segmenty wokół odcinków sąsiednich.



Rys. 22. Pas wokół L

Z obwodów segmentów usuńmy boki równoległoboków otaczających wierzchołki łamanej, te, które przecinają łamaną L . Pozostałe odcinki obwodów segmentów tworzą cykl, co się łatwo sprawdza. Punkty r' i r'' leżą na tym cyklu.

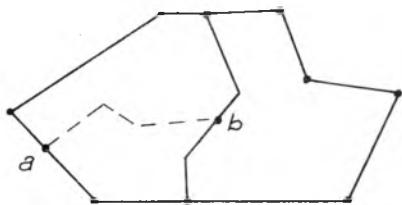
Niech p będzie dowolnym punktem spoza L . Pokażemy, że punkt p można połączyć łamaną leżącą poza L z jednym z punktów r' lub r'' .

Poprowadźmy z punktu p prostą l tak, by przecięła L . Na prostej l weźmy punkt t leżący na cyklu wokół L taki, że odcinek pt nie przecina L ; jest tylko jeden taki punkt. Na rys. 22 zilustrowany jest przypadek, kiedy p nie leży w żadnym z segmentów $P(I)$.

Idąc w którymkolwiek kierunku po tym cyklu, natrafimy bądź na punkt r' , bądź na punkt r'' . Ta droga i odcinek pt prostej l daje łamaną łączącą punkt p poza łamaną L z jednym spośród punktów r' i r'' .

Wyprowadźmy teraz pewne wnioski z twierdzenia Jordana-Dehna potrzebne dla dalszych celów.

Twierdzenie o konfiguracji θ . *Trzy łamane mające końce w dwu danych punktach płaszczyzny i poza tym rozłączne rozcinają płaszczyznę, na której leżą, na trzy obszary, tak że każda para łamanych jest brzegiem dokładnie jednego z tych obszarów.*



Rys. 23. Konfiguracja w kształcie litery θ

Uwagi przed dowodem. Skoro — jak będzie dowiedzione — brzeg obszaru-składowej dopełnienia opisanej konfiguracji — nazywanej dalej konfiguracją θ (theta) — złożonej z trzech łamanych, jest sumą dwu spośród tych łamanych, to trzecia łamana leży, pomijając końce, poza domknięciem tego obszaru.

Wynika stąd dalej, że każda z łamanych, pomijając końce, leży na brzegu dokładnie obszarów-składowych dopełnienia konfiguracji θ , a mianowicie jest równa przekrojowi ich domknięć i jest rozłączna, poza swoimi końcami, z domknięciem trzeciego obszaru-składowej dopełnienia konfiguracji.

Konsekwencją twierdzenia jest również to, że łamana łącząca dwa punkty konfiguracji leżące na dwu różnych jej łukach (punkty a i b na rys. 23) i leżąca, nie licząc wspomnianych punktów, poza konfiguracją, leży całkowicie (pomijając wspomniane punkty) w tej składowej dopełnienia konfiguracji, która jest ograniczona tymi spośród dwu łuków konfiguracji, na których leżą łączone punkty.

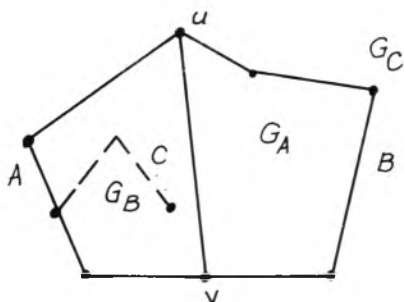
D o w ó d. Rozważmy konfigurację Q daną przez dwa punkty u i v oraz trzy łamane A , B i C , mające końce w punktach u i v , poza tym bez punktów wspólnych.

Rozważmy dowolne dwie spośród łamanych A i B . Ich suma $A \cup B$ jest łamaną zamkniętą, która na mocy twierdzenia Jordana-Dehna rozcina płaszczyznę na dwa obszary. Łamana C , jeśli pominąć końce, jest (wobec jej spójności) zawarta w jednym z tych obszarów. Oznaczmy przez G_C ten drugi obszar. Punkty łamanej C , różne od u i v , leżą poza domknięciem obszaru G_C .

Podobnie określamy obszary G_A i G_B . Brzegiem obszaru G_A jest łamana $B \cup C$, a brzegiem obszaru G_B łamana $A \cup C$.

Trójka obszarów G_A , G_B i G_C stanowi komplet obszarów-składowych dopełnienia sumy $A \cup B \cup C$.

Dla dowodu, zauważmy najpierw, że każdy z tych obszarów jako zbiór spójny jest zawarty całkowicie w jednej ze składowych dopełnienia sumy $A \cup B \cup C$, a jako składowa dopełnienia zbioru $A \cup B \cup C$ zawiera tę składową i w rezultacie jest jej równa.



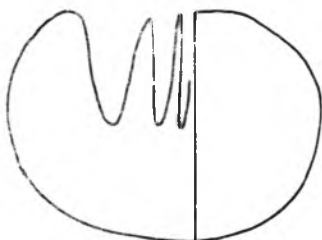
Rys. 24. Nie ma trzeciego obszaru

kujemy, że punkt q leży na brzegu co najwyżej dwu obszarów dopełnienia sumy $A \cup B \cup C$. Przyjmijmy, że $q \in A$. Punkt q jest wtedy punktem brzegów obszarów G_B i G_C . Ponieważ, jak wspomnieliśmy, punkt q leży na $A \cup B \cup C$ i dlatego nie leży na brzegu żadnej składowej dopełnienia sumy $A \cup B \cup C$, więc w dostatecznie małym otoczeniu punktu q łamana pq przebiega bądź przez obszar G_B , bądź przez obszar G_C . Ponieważ łamana, pomijając punkt q , omija $A \cup B \cup C$, więc leży całkowicie bądź w G_B , bądź w G_C . Stąd, $p \in G_B$ lub $p \in G_C$.

Ponieważ punkt p jest dowolnym punktem poza $A \cup B \cup C$, a wyróżnienie w dowodzie łamanej A nie wpływa na ogólność, wykazaliśmy w ten sposób, że obszary G_A , G_B i G_C wypełniają całe dopełnienie sumy $A \cup B \cup C$.

U w a g a. W końcowym fragmencie dowodu skorzystaliśmy z tego, że łamana nie rozspaja płaszczyzny lokalnie więcej niż na dwa obszary. Dla konfiguracji θ jedynymi jej punktami leżącymi na brzegu trzech obszarów dopełnienia są punkty u i v , w których schodzą się jej łuki.

Ogólnie biorąc, przy rozbiću płaszczyzny na trzy obszary, jeśli brzegi ich nie są sumami skończonej ilości łuków, punktów, w których schodzą się trzy obszary, może być więcej, jak pokazuje przykład z rys. 25, w którym łuk A z konfiguracji θ został zastąpiony sinusoidą zagęszczoną⁽⁸⁾.



Rys. 25. Punkty wspólne brzegów trzech obszarów

Osobliwości mogą tu dojść do krańcowości: można zbudować na płaszczyźnie obszar, którego brzeg jest brzegiem jeszcze dwóch innych obszarów (o tego rodzaju osobliwościach będzie okazywać mówić w wykładzie 7).

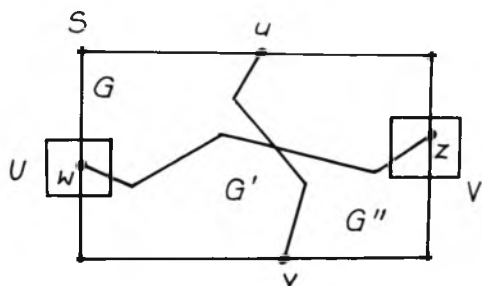
Twierdzenie o krzywej θ da się streścić również w następujący sposób: łamana łącząca dwa punkty na łamanej zamkniętej, poza tym nie mająca z nią punktów wspólnych, rozcina obszar-składową dopełnienia łamanej

zamkniętej na dwa obszary i jest przekrojem domknięt tych obszarów, będąc rozłączną z drugą składową dopełnienia łamanej zamkniętej.

⁽⁸⁾ W zwykłym położeniu na płaszczyźnie sinusoida zagęszczona jest kontinuum, na które składa się wykres funkcji $y = \sin(1/x)$, $0 < x \leq 1/\pi$ i odcinek $-1 \leq y \leq 1$ osi y -ów.

Twierdzenie (o przecinaniu się łamanych łączących przedzielające się pary punktów). Niech S będzie łamaną zamkniętą i niech G będzie jednym z dwu obszarów, na jakie rozcina ona płaszczyznę. Niech L będzie łamaną łączącą w G punkty u i v łamanej S . Niech w i z będą parą punktów na S , przedzielającą się z parą u i v . Łamana K , łącząca w G punkty w i z , przecina łamaną L .

Dowód. Z twierdzenia o krzywej θ wynika, że łamana L rozcina obszar G na dwa obszary G' i G'' mające L jako przekrój swoich domknięć.



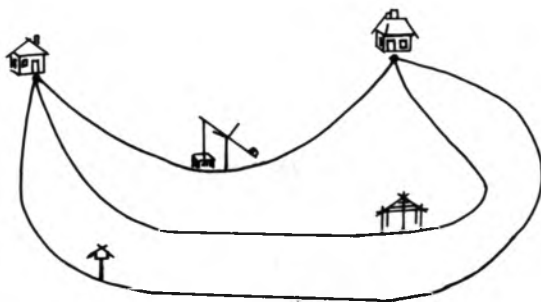
Rys. 26. Łamane K i L muszą się przeciąć

Brzeg obszaru G' składa się z łamanej L i jednej z dwu łamanych, na jakie punkty u i v rozcinają S ; przyjmijmy, że jest to ta łamana, na której leży punkt w . Punkt z leży na drugiej z nich, na brzegu obszaru G'' . Niech U będzie otoczeniem punktu w rozłącznym z L . Niech V będzie otoczeniem punktu z rozłącznym z L . Weźmy na łamanej K punkty: punkt x' w $U \cap G'$ i punkt x'' w $V \cap G''$. Część łamanej K łączącej punkty x' i x'' musi przeciąć brzeg obszaru G' (bo $x'' \notin G'$). Ponieważ K nie przecina S (jeśli pominąć w i z), więc i wspomniana część łamanej K nie przecina S . Musi więc przeciąć tę część brzegu obszaru G' , która leży poza S . Przecina zatem łamaną L .

* * *

Spośród wielu zadań — niektóre z nich mają charakter anegdotyczny — dla których rozwiązania wykorzystuje się twierdzenia o rozcinaniu płaszczyzny, między innymi twierdzenie o konfiguracji θ , przytoczymy kilka najbardziej znanych.

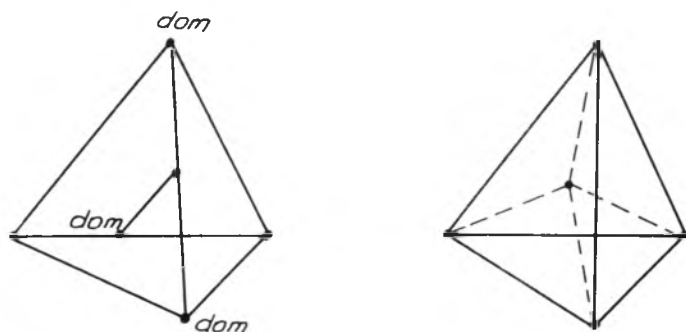
Oto pierwsze z nich według *Kalejdoskopu matematycznego* Hugona Steinhausa (s. 261, wyd. z 1956 r.).



Rys. 27. Gdziekolwiek znajdowałby się trzeci dom, nie znajdzie się żeń ścieżki do gołębnika bądź do studni, bądź do brogu

„Mamy trzy domy, gołębnik, studnię i bróg; trzeba znaleźć z każdego domu ścieżki do gołębnika, studni i brogu tak, by nie przecinały się wzajemnie. To jest niemożliwe”.

W przestrzeni daje się to zrobić. Powstaje konfiguracja zamieszczona po lewej stronie na rys. 28.



Rys. 28. Grafy Kuratowskiego

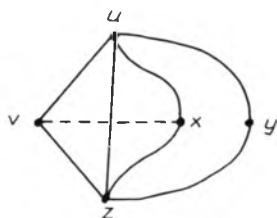
K u r a t o w s k i (1930) dowiódł, że graf niesplaszczalny musi zawierać jedną z dwu konfiguracji przedstawionych na rys. 28⁽⁹⁾.

Pierwsza jest konfiguracją z zadania o trzech domkach. Jest to graf o 6 wierzchołkach — każdy rzędu 3.

Druga konfiguracja polega na połączeniu pięciu punktów, każdy z każdym, nie przecinającymi się łamanymi.

Druga konfiguracja jest niesplaszczalna, co pokazuje następujące rozumowanie.

Jeśli pięć punktów u, v, x i z leżących na płaszczyźnie mają być połączone każdy z każdym nie przecinającymi się łamanymi, to w szczególności punkty u i z muszą być połączone nie przecinającymi się łamanymi z pozostałymi. Powstaje konfiguracja płaska (rys. 29) będąca konfiguracją θ z punktami v, x i y na jej łukach.



Rys. 29. Połączenie na płaszczyźnie pięciu punktów, każdy z każdym, jest niemożliwe

⁽⁹⁾ K. Kuratowski, *Sur le problème des courbes gauches en topologie*, Fund. Math. 15 (1930), 271—283. Dowód twierdzenia Kuratowskiego można znaleźć między innymi w książce F. Harary'ego, *Graph theory*, 1969 (wyd. ros. z 1973 r., s. 133); por. także C. Thomassen, *A link between the Jordan curve theorem and the Kuratowski planarity criterion*, American Mathematical Monthly 97 (1990), 216—218.

Łamana łącząca u i z musi leżeć, pomijając końce, całkowicie w jednym z trzech obszarów, na które ta konfiguracja θ rozcina płaszczyznę. Przyjmijmy, że jest to obszar ograniczony łamanymi uvz i uxz . Łamana łącząca v i x musi również leżeć, pomijając końce, we wspomnianym obszarze, co wynika z ogólnej własności konfiguracji θ (odnotowanej w uwagach przed dowodem twierdzenia na s. 31). Na mocy twierdzenia ze s. 33, łamana łącząca v i x musi przeciąć łamaną u i z , bo pary v i x oraz u i z przedzielają się.

Jeśli graf już leży na płaszczyźnie, to pewien problem pozostaje: czy ma takie położenie, w którym połączenia między węzłami są prostoliniowe?

Odpowiedź brzmi: tak. Dowiódł tego I. Fary (1948)⁽¹⁰⁾. Mapy dołączane do kolejowych rozkładów jazdy przygotowuje się tak, by połączenia między stacjami węzłowymi były odcinkami prostoliniowymi. W przypadku bogatej sieci kolejowej da się to zrobić jedynie za cenę znacznych zniekształceń odległości. Mapa PKP ma kilka połączeń nieprostoliniowych.

* * *

Przez *triód* rozumiemy graf złożony z trzech łamanych wychodzących z jednego punktu i poza tym nie przecinających się. Łamane składające się na triód nazwijmy jego *łukami*, ich punkt wspólny *wierzchołkiem*, a pozostałe końce łamanych *końcami* triodu.

Twierdzenie Moore'a (1928)⁽¹¹⁾. *Na płaszczyźnie można ułożyć nie więcej niż przeliczalnie wiele nie przecinających się triodów.*

D o w ó d. Niech B będzie bazą przeliczalną topologii płaszczyzny złożoną z prostokątów. Triodowi T leżącemu na płaszczyźnie przypisujemy czwórkę

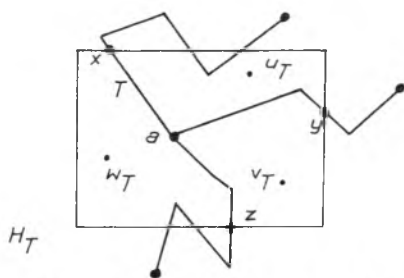
$$C_T = \{u_T, v_T, w_T, H_T\},$$

w której H_T jest prostokątem należącym do bazy B , zawierającym wierzchołek i nie zawierającym żadnego z końców triodu T , a u_T, v_T i w_T są punktami o obu współrzędnych wymiernych, które dobieramy jak następuje.

Na łukach triodu T wybierzmy, na każdym po jednym, punkty x, y i z leżące na brzegu prostokąta H_T — pierwsze na tych łukach, licząc od wierzchołka a triodu. Prostokąt H_T zostaje rozcięty łamanymi ax, ay i az

⁽¹⁰⁾ I. Fary, *On straight line representations of planar graphs*, Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged 11 (1948), 229—233; por. również książkę P. J. Giblina, *Graphs, surfaces and homology*, London 1977, s. 41 oraz wzmiankę w *Graph theory* F. Harary'ego, Reading 1969, w rozdz. 11.

⁽¹¹⁾ R. L. Moore, *Concerning triods in the plane and the junction points of plane continua*, Proc. of the Nat. Academy of Sciences 14 (1928), 85—88. Dowód według C. R. Pittmana, *An elementary proof of the triod theorem*, Proc. of the Amer. Math. Soc. 25 (1970), 919. Por. również R. L. Moore, *Concerning triodic continua in the plane*, Fund. Math. 13 (1929), 261—263, gdzie dowiedzione jest twierdzenie ogólniejsze.



Rys. 30. Czwórka (u_T, v_T, w_T, H_T)

na trzy obszary odpowiadające łamanym xy , yz i zx dającym w sumie brzeg prostokąta H_T (twierdzenie o konfiguracji θ trzeba w tym celu stosować dwa razy). W każdym z tych trzech obszarów ustalmy punkty u_T , v_T i w_T w obu współrzędnych wymiernych.

Wykażemy, że jeśli T i T' są triodami rozłącznymi, to czwórki C_T i $C_{T'}$ są różne.

Wystarczy zająć się przypadkiem, kiedy prostokąty H_T i $H_{T'}$ w obu czwórkach są te same. Pokażemy, że wtedy czwórki C_T i $C_{T'}$ różnią się jednym z pozostałych członów.

Wierzchołek a' triodu T' leży w jednym z trzech obszarów wyciętych przez triod T (w opisany dopiero co sposób) na prostokącie $H_T (= H_{T'})$. Niech to będzie obszar wyznaczony przez xy i niech punktem czwórki C_T w nim wybranym będzie u_T . W obszarze tym są zawarte dwa spośród trzech obszarów, na jakie triod T' rozcina (w opisany już sposób) prostokąt $H_{T'}$ (równy prostokątowi H_T), bo na xy leżą wszystkie trzy punkty x' , y' , z' wyznaczające wspomniane trzy obszary. Stąd, pewne dwa spośród punktów $u_{T'}$, $v_{T'}$ i $w_{T'}$, wybranych w wyróżnionych przedtem dwu obszarach, nie mogą być punktami v_T i w_T . Czwórki C_T i $C_{T'}$ są więc różne.

Określiśmy w ten sposób odwzorowanie różnowartościowe rodziny triodów rozłącznych położonych na płaszczyźnie w zbiór przeliczalny czwórek, z których każda jest złożona z prostokąta należącego do ustalonej bazy przeliczalnej płaszczyzny i z trzech punktów wymiernych.

* * *

Twierdzenie Jordana-Dehna ma w sobie niedopowiedzenie: nie objaśnia tego, czym jest składowa dopełnienia łamanej zamkniętej. Mówi o tym

Twierdzenie Schoenfliesa (dla łamanych) (1906)⁽¹²⁾. *Składowa ograniczona dopełnienia łamanej zamkniętej do płaszczyzny jest, po dołączeniu do niej tej łamanej, homeomorficzna z trójkątem płaskim wraz z obwodem. Więcej: każdy homeomorfizm łamanej zamkniętej na obwód trójkąta ma przedłużenie do homeomorfizmu wspomnianej składowej (z dołączoną doń łamaną) na pełny trójkąt.*

Dowód przebiega indukcyjnie ze względu na ilość odcinków łamanej. Lematem, który umożliwia przejście indukcyjne, jest następujące twierdzenie geometrii elementarnej, formułowane tu jako:

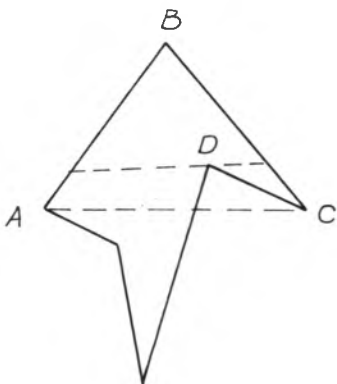
⁽¹²⁾ Prace Schoenfliesa z lat 1906—1908; por. wykład 7, w którym będzie dowiedzione twierdzenie dalej idące.

Lemat o wolnej przekątnej. *Wielokąt zamknięty o więcej niż trzech bokach ma wśród swoich przekątni co najmniej jedną przekątnią wolną, tj. taką, która leży całkowicie, pomijając końce, w jednym z obszarów dopełnienia wielokąta.*

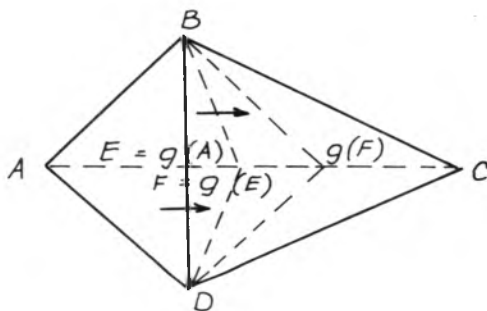
Dowód. Weźmy pod uwagę trzy sąsiadujące wierzchołkami odcinki A , B i C wielokąta i kąt wypukły (tj. $< 180^\circ$), jaki tworzą odcinki AB i BC (por. rys. 31). Jeśli odcinek AC nie przecina (poza końcami A i C) wielokąta, to jest poszukiwaną wolną przekątnią. Jeśli tak nie jest, to przez każdy z wierzchołków łamanej zawartej w trójkącie ABC poprowadzimy równoległe do AC i weźmy tę z nich, która jest najbliższa wierzchołkowi B . Leżący na niej wierzchołek łamanej (którykolwiek; na rysunku jest to wierzchołek D) połączmy odcinkiem z punktem B . Jest to poszukiwana przekątnia.

Opisane niżej dwa homeomorfizmy posłużą zapoczątkowaniu indukcji.

1. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Istnieje homeomorfizm przekształcający czworokąt $ABCD$ na trójkąt BCD taki, że łamana BAD przechodzi na odcinek BD (przez rzutowanie w kierunku AC) i który jest tożsamością na bokach DC i CB .



Rys. 31. Lemat o wolnej przekątnej

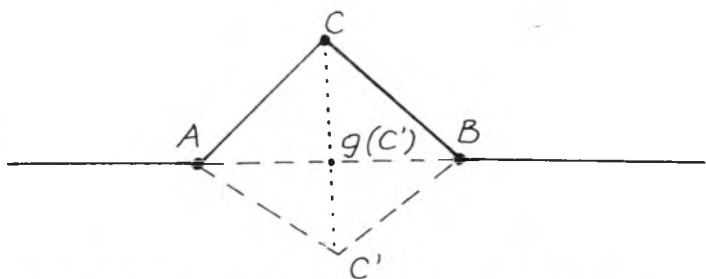


Rys. 32. Homeomorfizm g „wgniatający” trójkąt ABD do wnętrza trójkąta BDC

Homeomorfizm polega na „wgnieceniu” wypukłości BAD do wnętrza trójkąta BCD wzdłuż linii łączącej A i C (por. rys. 32).

2. Niech ABC będzie trójkątem opartym bokiem AB na prostej l . Niech P i P' będą półpłaszczyznami, na które l rozcina płaszczyznę. Niech C leży na P , a C' na P' . Istnieje homeomorfizm półpłaszczyzny P powiększonej o punkty prostej l na tę półpłaszczyznę (nadal z prostą l) powiększoną o trójkąt $AC'B$, tożsamościowy na l poza wnętrzem geometrycznym odcinka AB .

Homeomorfizm polega na „wypchnięciu” trójkąta ABC poza półpłaszczyznę P tak, by na przykład punkt C przeszedł na środek odcinka AB , a ten z kolei na punkt C' .

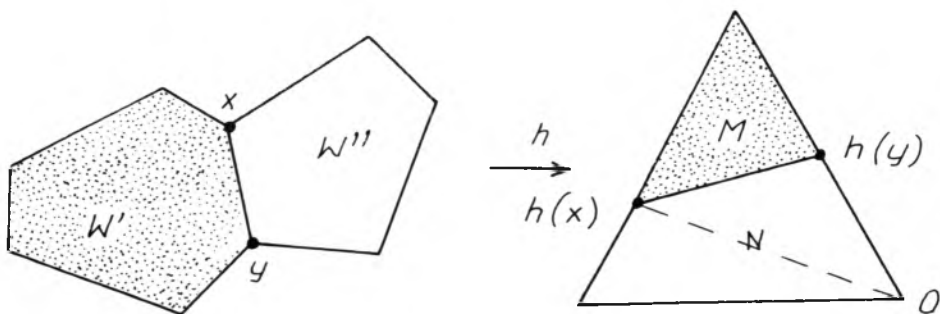


Rys. 33. Homeomorfizm wypychający $AC'B$ poza P

Dowód twierdzenia Schoenfliesa. Niech K będzie łamaną zamkniętą ograniczającą wielokąt W . Niech h będzie homeomorfizmem łamanej K na obwód trójkąta T . Mamy przedłużyć h do homeomorfizmu W na T . Niech xy będzie wolną przekątnią łamanej K (której końce x i y , leżąc poza K , zawierają się całkowicie w W). Przekątnia xy dzieli wielokąt W na dwa wielokąty W' i W'' ograniczone łamanymi zamkniętymi mającymi mniej boków niż łamana K .

Rozważmy najpierw przypadek, kiedy $h(x)$ i $h(y)$ leżą na różnych bokach trójkąta T . Odcinek $h(x)h(y)$ dzieli trójkąt T na trójkąt M i czworokąt wypukły N (patrz rys. 34). Przedłużmy h na odcinek xy tak, by przeszedł liniowo na $h(x)h(y)$. Niech W' będzie tą częścią wielokąta W , której obwód przechodzi przez tak zmodyfikowane h na obwód trójkąta M . Na mocy założenia indukcyjnego homeomorfizm h obwodu wielokąta W' przedłuża się do homeomorfizmu W' na M .

Pozostaje przedłużyć homeomorfizm h z obwodu wielokąta W' na czworokąt M .



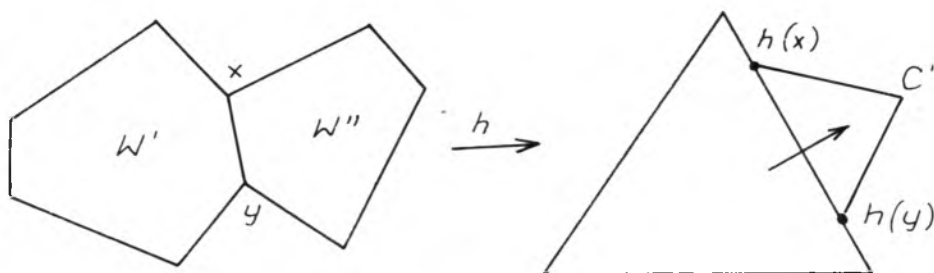
Rys. 34. Wielokąt W' jest przekształcony na trójkąt M , a wielokąt W'' na trójkąt N

Najpierw, za pomocą homeomorfizmu opisanego przed dowodem w punkcie 1, przekształcamy homeomorficznie czworokąt N na trójkąt $Oh(x)h(y)$, gdzie O jest jednym z wierzchołków czworokąta N przeciwnych do boku $h(x)h(y)$.

Homeomorfizm obwodu W'' na obwód N złożony z homeomorfizmem obwodu czworokąta N na obwód trójkąta $Oh(x)h(y)$ (identyczny z poprzednim na przeciwobrazach odcinków $h(x)h(y)$ i $h(y)O$). Ten homeomorfizm przedłużamy do homeomorfizmu W'' na trójkąt $Oh(x)h(y)$.

„Cofając wgniecenie”, dostajemy przedłużenie homeomorfizmu h na homeomorfizm wielokąta W'' na czworokąt N .

Pozostaje przypadek, kiedy $h(x)$ i $h(y)$ leżą na jednym i tym samym boku trójkąta T . Na odcinku $h(x)h(y)$ zbudujemy, jako na podstawie, trójkąt $h(x)C'h(y)$ na zewnątrz trójkąta T (patrz rys. 35) i rozważmy homeomorfizm opisany przed dowodem w punkcie 2, „wypychający” pewien trójkąt wewnątrz T , oparty na $h(x)h(y)$ jako na podstawie, na trójkąt $h(x)C'h(y)$. W tak zdeformowanym trójkącie T rozważmy odcinek $h(x)h(y)$ i przedłużmy homeomorfizm h na wolną przekątną xy tak, by przeszła liniowo na wspomniany odcinek. Przedłużmy h z obwodów wielokątów W' i W'' na całe te wielokąty tak, by przeszły na trójkąty T i $h(x)C'h(y)$, co da się zrobić wobec założenia indukcyjnego. Cofnijmy „wypchnięcie”. Dostajemy zapowiedziane przedłużenie odwzorowania h z wielokąta W na trójkąt T .



Rys. 35. Wielokąt W' jest przekształcony na trójkąt, a wielokąt W'' na trójkąt $h(x)C'h(y)$

Są dwie wersje twierdzenia Schoenfliesa: (a) słabsza, w której stwierdza się, że obszar ograniczony łamaną zamkniętą z dodaniem doń tej łamanej jest homeomorficzny z pełnym trójkątem, do czego wystarcza istnienie homeomorfizmu wspomnianego obszaru wraz z obwodem na trójkąt, przy którym obwody przechodzą na siebie, i (b) mocniejsza, której dowodziliśmy, a w której wymaga się, aby *każdy* homeomorfizm obwodów miał przedłużenie na obszary dopełnienia.

Analogonem łamanej zamkniętej na płaszczyźnie jest powierzchnia wielościennea homeomorficzna ze sferą dwuwymiarową, położona w przestrzeni trójwymiarowej. Prawdziwość twierdzeń Schoenfliesa przenosi się na ten przypadek, ale rzecz jest trudniejsza. Wersja (a) była dowiedziona przez

Alexandera (1924); wersja (b) była dowiedziona przez Browna (1960)⁽¹³⁾.

Twierdzenie Schoenfliesa pozwala na wzmocnienie tezy w twierdzeniu o grafach położonych foremnie na sferze z wykładu wstępnego, tak by orzekało ono o nieistnieniu więcej niż pięciu wielościanów foremnych o wierzchołkach na sferze: dwuwymiarowy przypadek twierdzenia Schoenfliesa należy zastosować do przedłużenia danych homeomorfizmów między obwodami ścian do homeomorfizmów między ścianami. Trójwymiarowe twierdzenie Schoenfliesa pozwala uzyskać analogiczny wniosek dotyczący brył, tzw. brył platońskich; por. przypis (8) do wykładu wstępnego.

⁽¹³⁾ J. W. Alexander, *On the subdivision of a 3-space by a polyhedron*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 10 (1924), 6—8. M. Brown, *A proof of the generalized Schoenflies theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 74—76.

WYKŁAD 2. Geometria analityczna przestrzeni euklidesowych • Sympleks • Współrzędne barycentryczne • Podział barycentryczny sympleksu • Pewne konfiguracje i odwzorowania wzorcowe • Triangulacje • Odwzorowania symplecjalne • Realizacje triangulacji w przestrzeniach euklidesowych • Twierdzenie o aproksymacji symplecjalnej • Spostrzeżenie Lebesgue'a

Wykład ten stanowi przygotowanie do następnych, poświęconych własnościom topologicznym, przestrzeni euklidesowych i figur w nich położonych. Wydobycie tych własności wymaga rozwinięcia pewnych środków pomocniczych. Są dwie znane metody: metoda kombinatoryczna — na przykład symplecjalna — i metoda różniczkowa. Zgodnie z wcześniejszą zapowiedzią posłużymy się pierwszą, bardziej elementarną, która wyraźniej zarysowuje geometryczne znaczenie twierdzeń.

Podstawową figurą geometryczną będzie sympleks. Przez odpowiednie połączenia sympleksów dostaje się wielościany. Te z kolei posłużą w dalszych wykładach jako aproksymacje dowolnych podzbiorów zwartych przestrzeni euklidesowych.

Tym tworzywem mogłyby być równie dobrze kostki: zyskuje się na poglądowości, ale traci na rachunkach⁽¹⁾.

Zacniemy od ogólnego formalizmu algebry liniowej.

* * *

Niech X będzie *przestrzenią wektorową* (rzeczywistą), tj. zbiorem elementów, nazywanych *wektorami*, które można dodawać tak, że tworzą grupę

⁽¹⁾ Ujęcie kostkowe — wprowadzie jedynie w wymiarze 2 — można znaleźć w książce *Elements of the topology of plane sets of points* M. H. A. Newmana, Cambridge University Press, 1939.

abelową i mnożyć je przez liczby rzeczywiste tak, że spełnione są znane warunki⁽²⁾:

$$\begin{aligned} 1a &= a, & \mu(\lambda a) &= (\mu\lambda)a, \\ \lambda(a+b) &= \lambda a + \lambda b, & (\lambda + \mu)a &= \lambda a + \mu a. \end{aligned}$$

Zakładamy, że każdemu wektorowi jest przypisana *długość* $|a|$ będąca liczbą rzeczywistą nieujemną spełniającą warunki:

$$\begin{aligned} |a| &= 0 \Leftrightarrow a = 0, \\ |\lambda a| &= |\lambda| |a|, \\ |a+b| &\leq |a| + |b| \quad (\text{warunek trójkąta dla normy}) \end{aligned}$$

Innymi słowy, zakładamy, że X jest *przestrzenią wektorową z normą* (bo tak się nazywa długość wektora spełniająca wypisane wyżej warunki).

Mając w X normę, mamy i metrykę daną wzorem $d(a, b) = |a - b|$.

Dodawanie, $(x, y) \rightarrow x + y$, i mnożenie przez liczbę, $(\lambda, a) \rightarrow \lambda a$, są odwzorowaniami ciągłymi (pierwsze jako odwzorowanie $X \times X \rightarrow X$, drugie jako odwzorowanie $E \times X \rightarrow X$), czego nietrudno się dowodzi.

Najogólniejszymi wyrażeniami, jakie można utworzyć za pomocą tych działań, to kombinacje liniowe,

$$\lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_k a_k,$$

wektorów a_0, \dots, a_k .

Zbiór wektorów a_0, \dots, a_n jest nazywany (*liniowo*) *niezależnym*, jeśli

$$\lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$$

dla wszelkich układów $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ liczb rzeczywistych. Mówi się też wtedy, że wektory a_0, \dots, a_n są *niezależne*.

Oczywiście, zbiór $\{a\}$ złożony z jednego wektora, $a \neq 0$, jest *niezależny*.

Niech $S = \{a_0, \dots, a_n\}$ będzie zbiorem wektorów *niezależnych* przestrzeni wektorowej X . Każdy wektor a przestrzeni X ma nie więcej niż jedno przedstawienie w postaci

$$(1) \quad a = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n.$$

⁽²⁾ W dalszym ciągu dla oznaczenia liczb rzeczywistych będą używane litery greckie λ, μ etc., chyba że będą to liczby 0, 1 etc. Dla oznaczenia wektorów będą używane litery łacińskie a, b etc. Symbol 0 będzie używany zarówno do oznaczania liczby zero, jak i wektora zerowego. Kontekst powinien wykluczyć nieporozumienie.

Istotnie, jeśli $a = \mu_0 a_0 + \dots + \mu_n a_n$ jest jeszcze jednym takim przedstawieniem, to $(\lambda_0 - \mu_0)a_0 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)a_n = 0$, skąd $\lambda_j = \mu_j$ wobec niezależności wektorów.

Zbiór $[S]$ wektorów a przestrzeni X , które dają się zapisać w postaci (1), będzie nazywany *podprzestrzenią generowaną przez zbiór S* ; działania dodawania i mnożenia przez liczbę nie wyprowadzają poza zbiór $[S]$, dzięki czemu stanowi on przestrzeń wektorową. Przyjmujemy, że zbiór dziedziczy normę, a więc i topologię, z X .

Liczby λ_j w przedstawieniu (1) wektora a nazwiemy *współrzednymi barycentrycznymi* wektora a względem zbioru S ; będą oznaczane symbolem $\lambda_j(a)$, jeśli chce się uwidocznic zależność od wektora.

* * *

Zbiór ciągów

$$t = (t_0, \dots, t_n)$$

liczb rzeczywistych z odległością między ciągami x i y daną wzorem

$$(2) \quad d(x, y) = \max \{ |x_0 - y_0|, \dots, |x_n - y_n| \}$$

jest nazywany *przestrzenią euklidesową $(n+1)$ -wymiarową wzorcową*. Nazwę tę — z opuszczeniem słowa „wzorcowa” — zachowamy również dla przestrzeni z nią homeomorficznych. Elementy przestrzeni euklidesowej będą nazywane *punktami*.

Punkty te można wszakże traktować jako wektory, określając mnożenie λx przez liczbę rzeczywistą λ i dodawanie $x + y$ wzorami

$$\lambda x = \lambda(x_0, \dots, x_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$$

i

$$x + y = (x_0, \dots, x_n) + (y_0, \dots, y_n) = (x_0 + y_0, \dots, x_n + y_n),$$

a normę $|x|$ wzorem

$$|x| = \max \{ |x_0|, \dots, |x_n| \}.$$

Norma $|x|$ jest odległością, w sensie wzoru (2), elementu $x = (x_0, \dots, x_n)$ od elementu $0 = (0, \dots, 0)$ określonej w ten sposób *przestrzeni wektorowej V^{n+1}* .

Jako zbiór i jako przestrzeń metryczna (w rezultacie jako przestrzeń topologiczna) przestrzeń V^{n+1} nie różni się niczym od poprzednio określonej przestrzeni euklidesowej wzorcowej, ale jest bogatsza o dodatkową strukturę — strukturę wektorową.

Jeśli przyjąć $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_1 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 1)$,

to V^{n+1} okazuje się niczym innym niż przestrzenią wektorową generowaną przez zbiór S wektorów e_0, \dots, e_n .

Zbiór tych elementów x przestrzeni V^{n+1} , dla których

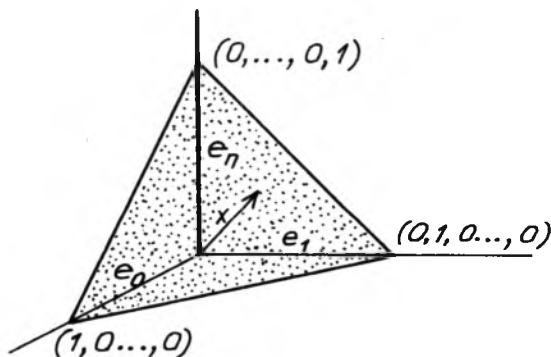
$$(3) \quad x_0 + \dots + x_n = 1,$$

jest podzbiorem domkniętym przestrzeni V^{n+1} (ciągłość rzutowań $x \rightarrow x_k$ i ciągłość dodawania); zbiór ten jest *hiperpłaszczyzną* n -wymiarową przechodzącą przez punkty $e_0 \dots e_n$. Hiperpłaszczyzna (3) z topologią dziedziczną z V^{n+1} jest homeomorficzna z V^n (np. przez zignorowanie ostatniej współrzędnej punktów), a więc z przestrzenią euklidesową n -wymiarową. Hiperpłaszczyzna (3) będzie w dalszym ciągu służyć jako reprezentant topologiczny przestrzeni euklidesowych n -wymiarowych; rezerwujemy dla niej symbol E^n .

Podzbiór Δ^n przestrzeni euklidesowej E^n danej jako podprzestrzeń (3) przestrzeni V^{n+1} złożony z punktów x takich, że

$$x_k \geq 0 \text{ dla wszelkich } k,$$

jest nazywany *sympleksem wzorcowym* n -wymiarowym. Sympleks Δ^n jest pod-



Rys. 36. Sympleks wzorcowy Δ^n . Mamy $\Delta^n \subset E^n \subset V^{n+1}$

zbiorem domkniętym przestrzeni E^n (argumentacja ta sama, co przedtem) i ograniczonym, bo zawartym w kostce $0 \leq x_k \leq 1$, $k = 0, \dots, n$; jest więc podprzestrzenią zwartą przestrzeni E^n .

* * *

Przypomnijmy, że *izomorfizm* przestrzeni wektorowych to odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zachowujące działania. W szczególności przy przejściu do obrazu pozostają wszelkie własności zbiorów określone za pomocą działań. Na przykład jeśli zbiór jest *odcinkiem* o końcach a i b , zbiorem kombinacji liniowych $ta + (1 - t)b$, gdzie $0 \leq t \leq 1$, to obraz tego zbioru przez izomorfizm h składa się z wektorów $th(a) + (1 - t)h(b)$; jest więc odcinkiem o końcach $h(a)$ i $h(b)$.

Jeśli $S = \{a_0, \dots, a_n\}$ jest zbiorem (skończonym) wektorów niezależnych w przestrzeni wektorowej X , to odwzorowanie h określone wzorem

$$h(x_0 e_0 + \dots + x_n e_n) = x_0 a_0 + \dots + x_n a_n$$

jest izomorfizmem przestrzeni V^{n+1} na podprzestrzeni $[S]$ przestrzeni X .

Pokażemy, że h jest homeomorfizmem V^{n+1} na $[S]$.

Wobec tego, że h jest izomorfizmem, ciągłości odwzorowań h i h^{-1} wystarczy dowodzić w zera.

Ciągłość h wynika z oszacowania $|h(x)| = |x_0 a_0 + \dots + x_n a_n| \leq |x|(|a_0| + \dots + |a_n|)$.

Ciągłość h^{-1} . Przypuśćmy, że h^{-1} nie jest ciągłe (w punkcie 0). Wynika stąd istnienie $\varepsilon > 0$ i punktów $x^{(m)}$ w V^{n+1} , $m = 1, 2, \dots$, takich że $|x^{(m)}| \geq \varepsilon$ i $|b(x^{(m)})| \leq 1/m$. Ponieważ h jest izomorfizmem, więc odcinek $[x^{(m)}, 0]$ przechodzi na odcinek $[h(x^{(m)}), 0]$. Wobec zwartości sfery $|x| = \varepsilon$ w V^{n+1} istnieje punkt x^* na tej sferze, którego każde otoczenie ma w sobie punkty nieskończenie wielu zbiorów $[x^{(m)}, 0] \cap \{x: |x| = \varepsilon\}$. Wobec dowiedzionej już ciągłości h dostajemy $h(x^*) = 0$ wbrew wzajemnej jednoznaczności odwzorowania h .

Dowód ciągłości h^{-1} był nietrywialny: korzystało się w nim ze zwartości sfer w przestrzeniach wektorowych wymiaru skończonego⁽³⁾.

Z dowiedzonego stwierdzenia wnioskujemy, że

Funkcje λ_j są ciągłe.

Istotnie, zbiór A_α złożony z punktów a przestrzeni $[S]$ takich, że $\lambda_j(a) < \alpha$ przechodzi przez izomorfizm h^{-1} na zbiór punktów x w V^{n+1} takich, że $x_j < \alpha$; jest to zbiór otwarty w V^{n+1} . Stąd, zbiór A_α jest otwarty jako obraz poprzedniego zbioru przez homeomorfizm h . Otwartość zbiorów A_α i zbiorów $B_\beta = \{a: \lambda_j(a) > \beta\}$ (czego dowodzi się analogicznie) implikuje ciągłość funkcji λ_j .

Zbiór wektorów $a = \lambda_0(a) a_0 + \dots + \lambda_n(a) a_n$ takich, że

$$(4) \quad \lambda_0(a) + \dots + \lambda_n(a) = 1,$$

$$(5) \quad \lambda_j(a) \geq 0,$$

jest nazywany sympleksem wyznaczonym przez zbiór $S = \{a_0, \dots, a_n\}$. Wektory a_j są nazywane wierzchołkami sympleksu; sympleks wyznaczony przez zbiór S będzie oznaczany przez $\Delta(S)$ lub przez $\Delta(a_0, \dots, a_n)$, jeśli zechcemy uwidocznić wierzchołki (kolejność wierzchołków w tym zapisie nie ma znaczenia).

Sympleks $\Delta(a_0, \dots, a_n)$ jest homeomorficzny z sympleksem wzorcowym Δ^n : odpowiednim homeomorfizmem jest poprzednio określony homeomorfizm $h: V^{n+1} \rightarrow [S]$ obcięty do Δ_n .

⁽³⁾ A. P. Robertson, W. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge University Press 1964 (tłum. ros., Mir, Moskwa 1967, s. 77).

Niech a_j będzie wierzchołkiem sympleksu $\Delta(S)$. Zbiór

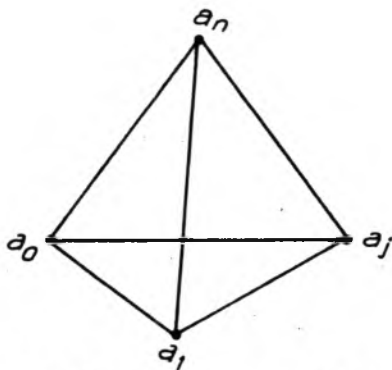
$$gw_{\Delta(S)} a_j = \{a \in \Delta(S) : \lambda_j(a) > 0\},$$

jest nazywany *gwiazdą* wierzchołka a_j w $\Delta(S)$; jest to zbiór otwarty w $\Delta(S)$, co wynika z ciągłości współrzędnej λ_j .

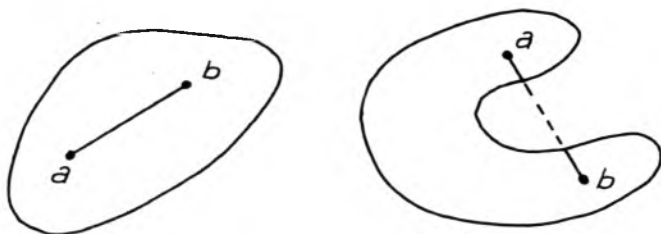
Dopełnienie do $\Delta(S)$ gwiazdy wierzchołka a_j , a więc zbiór $\{a \in \Delta(S) : \lambda_j(a) = 0\}$ jest nazywany *ścianą* sympleksu $\Delta(S)$ leżącą naprzeciw wierzchołka a_j ; jest to zbiór tych wektorów a należących do $\Delta(S)$, które dają się zapisać w postaci (1) bez użycia wierzchołka a_j ; jest to sympleks wyznaczony przez wszystkie wierzchołki sympleksu $\Delta(S)$ z wyjątkiem wierzchołka a_j . Ogólniej, przez $(j_0 \dots j_k)$ -*ścianę* sympleksu $\Delta(S)$ rozumiemy sympleks wyznaczony przez wierzchołki a_{j_0}, \dots, a_{j_k} sympleksu $\Delta(S)$; jest to ściana k -wymiarowa. Do ścian są w ten sposób zaliczone również wierzchołki jako ściany 0-wymiarowe. Oczywiście, ściana (j_0, \dots, j_k) jest dopełnieniem sumy gwiazd wierzchołków a_j , gdzie $j \notin \{j_0, \dots, j_k\}$. Ściany są podzbiórami domkniętymi sympleksu.

Gwiazdy wierzchołków wszystkie razem pokrywają sympleks $\Delta(S)$, bo — wobec (4) i (5) — każdy wektor a należący do $\Delta(S)$ musi mieć wśród swoich współrzędnych barycentrycznych co najmniej jedną dodatnią.

Ściany naprzeciw wierzchołków składają się razem na *brzeg sympleksu* — zbiór wektorów a takich, że $\lambda_j(a) = 0$ dla co najmniej jednego j .



Rys. 37. Ściana naprzeciw wierzchołka a_j



Rys. 38. Jeden ze zbiorów jest wypukły, a drugi nie

Podzbiór przestrzeni wektorowej nazywa się *wypukłym*, jeśli wraz z każdym z dwóch punktów a i b zawiera odcinek $ta + (1 - t)b$, $0 \leq t \leq 1$.

Twierdzenie. *Sympleks jest zbiorem wypukłym.*

Dla dowodu, niech x i x' będą punktami sympleksu Δ^n , $x = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n$ i $x' = x'_0 e_n + \dots + x'_n e_n$. Punkty $tx + (1-t)x'$, $0 \leq t \leq 1$, odcinka łączącego x i x' , leżą wszystkie w Δ^n , co widać, obliczając ich współrzędne barycentryczne $tx_i + (1-t)x'_i$, sprawdzając, że są nieujemne i że w sumie dają 1.

Nietrudno dowieść, że sympleks $\Delta(a_0, \dots, a_n)$ jest najmniejszym zbiorem wypukłym, do którego należą punkty a_0, a_n .

Nazwa „współrzędne barycentryczne” ma uzasadnienie. Punkt

$$b = (1/(n+1))(a_0 + \dots + a_n)$$

jest środkiem ciężkości układu punktów materialnych o jednakowych masach umieszczonych w wierzchołkach a_j sympleksu. Jeśli w wierzchołkach a_j umieścić masy m_j , to ich środek ciężkości wyrazi się znanym wzorem

$$x = (m_0 a_0 + \dots + m_n a_n) / (m_0 + \dots + m_n),$$

co daje $\lambda_j(x) = m_j/(m_o + \dots + m_n)$ dla j -tej współrzędnej barycentrycznej. Każdy punkt sympleksu można uzyskać tym wzorem przy odpowiednim układzie mas. Dla punktów spoza sympleksu interpretacja zawodzi, ponieważ niektóre spośród mas m_i musiałyby być ujemne⁽⁴⁾.

* * *

Punkt $b = (1/(n+1)) (a_0 + \dots + a_n)$, mający jednakowe współrzędne barycentryczne, jest nazywany *barycentrum* sympleksu $\Delta(S)$.

Nadajmy teraz znaczenie numeracji $\{a_0, \dots, a_n\}$ wierzchołków sympleksu $\Delta(S)$ i weźmy pod uwagę ciąg wstępujący ścian tego sympleksu,

$$\Delta(a_0) \subset \Delta(a_0, a_1) \subset \dots \subset \Delta(a_0, \dots, a_n),$$

oraz ich barycentra $b_0, b_1, \dots, b_n (= b)$, tj. punkty

$$(6) \quad \begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = (1/2) (a_0 + a_1) \\ \dots\dots\dots \\ b_n = (1/(n+1))(a_0 + \dots + a_n). \end{cases}$$

⁽⁴⁾ Współrzędne barycentryczne — ich idea pochodzi od Augusta Ferdynanda Möbiusa (1790—1868).

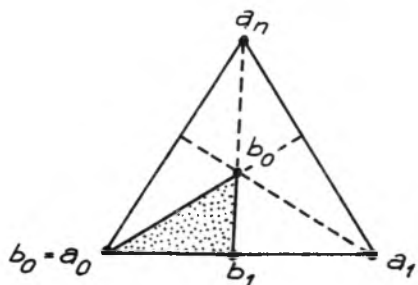
Barycentra b_0, \dots, b_n są liniowo niezależne (co się łatwo sprawdza). Sympleks $\Delta(b_0, \dots, b_n)$, tj. zbiór wektorów postaci

$$(7) \quad a = \mu_0 b_0 + \dots + \mu_n b_n,$$

gdzie $\mu_0 + \dots + \mu_n = 1$ i $\mu_k \geq 0$ dla każdego k , jest zawarty w $\Delta(S)$.

Istotnie, jeśli a jest postaci (7), to biorąc pod uwagę (6), mamy

$$(8) \quad a = (\mu_0 + (1/2)\mu_1 + \dots + (1/(n+1))\mu_n)a_n + ((1/2)\mu_1 + \dots + (1/(n+1))\mu_n)a_1 + \dots + (1/(n+1))\mu_n a_n.$$



Rys. 39. Sympleks $\Delta(b_0, \dots, b_n)$ i inne sympleksy podziału barycentrycznego

Widzimy, że wszystkie współczynniki przy a_k są nieujemne i że w sumie dają $\mu_0 + \dots + \mu_n = 1$.

Wobec (8), punkty sympleksu $\Delta(b_0, \dots, b_n)$ zapisujemy, jak następuje

$$(9) \quad a = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n,$$

gdzie $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ i $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$.

Na odwrót, każdy punkt a postaci (9) należy do sympleksu $\Delta(b_0, \dots, b_n)$.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że z równań (6) można wyznaczyć a_k jako kombinacje liniowe wektorów b_0, \dots, b_n .

Mamy:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 \\ a_1 &= 2b_1 - b_0 \\ a_2 &= 3b_2 - 2b_1 \\ &\dots \dots \dots \\ a_n &= (n+1)b_n - nb_{n-1}. \end{aligned}$$

skąd

$$a = \lambda_0 b_0 + \lambda_1 (2b_1 - b_0) + \lambda_2 (3b_2 - 2b_1) + \dots + \lambda_n ((n+1)b_n + nb_{n-1}) = (\lambda_0 - \lambda_1)b_0 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)b_1 + \dots + (n+1)\lambda_n b_n;$$

suma współczynników przy b_k jest równa 1 i są one nieujemne, bo stale $\lambda_k \leq \lambda_{k-1}$.

Biorąc rozmaite uporządkowania zbioru S , otrzymamy $(n+1)!$ sympleksów określonych jak wyżej.

Suma tych sympleksów daje całe $\Delta(S)$, bo dla każdego z punktów $a = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n$ jest $\lambda_{i_0} \geq \lambda_{i_1} \geq \dots \geq \lambda_{i_n}$ przy pewnej permutacji i_0, \dots, i_n zbioru $\{0, \dots, n\}$.

Barycentrum należy do każdego z tych sympleksów.

Zauważmy, że jeśli wśród liczb λ_k , określających wzorami (9) punkt sympleksu $\Delta(b_0, \dots, b_n)$, zdarzają się równe sobie, to punkt należy do brzegu sympleksu. Dokładniej, jeśli $\lambda_j = \lambda_{j+1}$ dla pewnego j , to wynika stąd, że $\mu_j = 0$ we wzorze (7); znaczy to, że punkt należy do ściany sympleksu $\Delta(b_0, \dots, b_n)$ leżącej naprzeciw b_j .

Na odwrót, jeśli $j \neq n$ i a należy do ściany naprzeciw b_j , to $\mu_j = 0$ i w rezultacie $\lambda_j = \lambda_{j+1}$. Ściana ta jest wspólną ścianą jeszcze jednego (i tylko jednego) sympleksu spośród $(n+1)!$ sympleksów określanych wzorami (7) dla rozmaitych permutacji zbioru $\{0, \dots, n\}$, mianowicie sympleksu wyznaczonego przez permutację $0, \dots, j-1, j+1, j, \dots, n$ (przestawiającą miejscami j i $j+1$).

Streszczając ostatnie zdanie, każda ściana $(n-1)$ -wymiarowa sympleksu $\Delta(b_0, \dots, b_n)$ jest ścianą jeszcze jednego i tylko jednego sympleksu (7), chyba że jest to ściana naprzeciw wierzchołka b_n , czyli naprzeciw barycentrum b sympleksu $\Delta(S)$, a więc ściana zawarta w ścianie sympleksu $\Delta(S)$ leżącej naprzeciw wierzchołka a_n (bo wtedy $\lambda_n = 0$).

Niech $\Delta(b_0, \dots, b_n)$ i $\Delta(b_{j_0}, \dots, b_{j_n})$ będą dwoma sympleksami (7) odpowiadającymi: pierwszy permutacji $\{0, \dots, n\}$, a drugi permutacji $\{j_0, \dots, j_n\}$ (to, że pierwsza z tych permutacji jest tożsamościowa, nie będzie miało wpływu na konkluzję rozważań). Niech J będzie zbiorem (maksymalnym) tych wskaźników spośród $0, \dots, n$, na których obie permutacje się zgadzają.

Sympleks Δ_J o wierzchołkach b_j , gdzie $j \in J$, jest wspólną ścianą sympleksów $\Delta(b_0, \dots, b_n)$ i $\Delta(b_{j_0}, \dots, b_{j_n})$.

Jest tak, bo jeśli $x \in \Delta_J$, to w zapisie

$$x = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n, \quad \lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0,$$

nierówności ostre, $\lambda_j > \lambda_{j+1}$, mogą wystąpić jedynie wtedy, kiedy j i $j+1$ należą do J ; pozostałe różnice, a więc współrzędne pozostałych b_j są zerami.

Ponieważ opisaną wyżej własność muszą mieć wszystkie punkty wspólne dla obu sympleksów, przekrój tych sympleksów jest równy wskazanej wyżej ich wspólnej ścianie Δ_J .

Streszczając, sympleksy (7) wzięte dla wszystkich $(n+1)!$ permutacji zbioru $\{0, \dots, n\}$ pokrywają sympleks $\Delta(S)$, a przekrój każdego z dwóch spośród nich jest ich wspólną ścianą; ściana $(n-1)$ -wymiarowa sympleksu (7) jest ścianą jeszcze jednego i tylko jednego sympleksu (7), chyba że ściana ta leży na brzegu sympleksu $\Delta(S)$.

Zbudowana tu rodzina sympleksów jest nazywana *podziałem barycentrycznym sympleksu*.

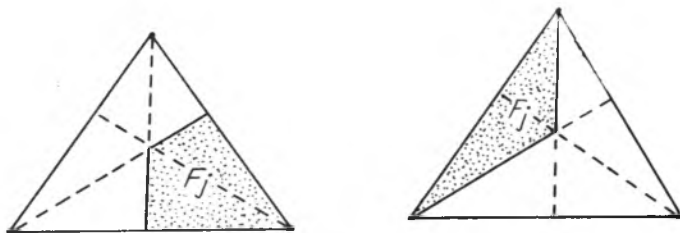
Pewne dwie konfiguracje.

1. Dla wierzchołka a_j sympleksu $\Delta^n = \Delta(a_0, \dots, a_n)$ rozważmy sumę F_j wszystkich sympleksów jego podziału barycentrycznego sympleksu Δ^n mających a_j jako swój wierzchołek. Zbiory F_j , $j = 0, \dots, n$, są domknięte, pokrywają sympleks Δ^n i

$$F_j \subset gw_{\Delta^n} a_j \text{ dla każdego } j.$$

Barycentrum b sympleksu Δ^n jest — jedynym — ich punktem wspólnym:

$$F_0 \cap \dots \cap F_n = \{b\}.$$



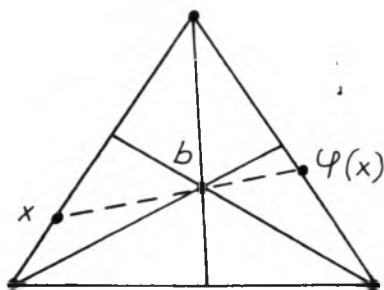
Rys. 40. Dwie konfiguracje w sympleksie

2. Dla wierzchołka a_j sympleksu $\Delta^n = \Delta(a_0, \dots, a_n)$ rozważmy sumę F_j wszystkich sympleksów jego podziału barycentrycznego mających ściany $(n-1)$ -wymiarowe na ścianie sympleksu Δ^n leżącej naprzeciw a_j . Zbiory F_j są domknięte, pokrywają sympleks Δ^n oraz

$$\Delta^n - gw_{\Delta^n} a_j \subset F_j \text{ dla każdego } j.$$

Barycentrum b jest — jedynym — ich punktem wspólnym:

$$F_0 \cap \dots \cap F_n = \{b\}.$$



* * *

Antypodyzm

Odwzorowanie $\varphi: \partial\Delta^n \rightarrow \partial\Delta^n$, przyporządkowujące punktowi x brzegu $\partial\Delta^n$ sympleksu jedynego — poza x — punktu $\varphi(x)$ brzegu tego sympleksu, leżącego na prostej bx , nazwiemy *antypodyzmem*; mamy $\varphi(\varphi(x)) = x$.

Antypodyzm przyporządkowuje wierzchołkowi a_j barycentrum ściany naprzeciw a_j . Oczywiście, jest zawsze $\varphi(x) \neq x$. Antypodyzm jest odwzorowaniem ciągłym; dowód — polegający na wypisaniu *explicite* wzoru na $\varphi(x)$ — pomijamy.

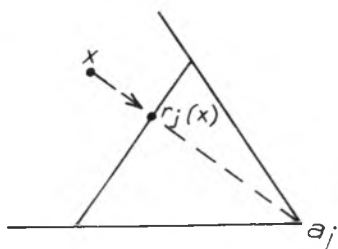
* * *

Retrakcja kanoniczna E^n na Δ^n .

Niech $r: E^n \rightarrow \Delta^n$ będzie retrakcją przypisującą punktowi

$$(10) \quad x = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n, \quad \lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1,$$

spoza Δ^n (niektóre spośród λ_j są ujemne!) punkt $r(x)$, którego zapis barycentryczny, za pomocą a_0, \dots, a_n , powstaje z zapisu (10) przez wykreślenie wyrazów z ujemnymi λ_j i podzielenie każdej z pozostałych współrzędnych przez ich sumę.



Rys. 42. Retrakcja kanoniczna

Retrakcję $r: E^n \rightarrow \Delta^n$, która będzie nazywana *kanoniczną*, można widzieć jako złożenie ze sobą — w dowolnym porządku — $n+1$ retrakcji r_j przestrzeni E^n na półprzestrzenie $\lambda_j(x) \geq 0$, przyporządkowujących punktom x , w których zapisie barycentrycznym (10) współrzędna $\lambda_j(x)$ jest ujemna, jednego punktu przecięcia odcinka $a_j x$ z hiperpłaszczyzną $\lambda_j(x) = 0$ (na pozostałych punktach określamy r_j jako tożsamość).

Rys. 42 ilustruje retrakcję r_j geometrycznie.

Pewne homotetie.

Niech $\beta < 1/(n+1)$. Zbiór

$$S_\beta = \{x \in E^n : \lambda_j(x) \geq \beta, \lambda_0(x) + \dots + \lambda_n(x) = 1\}$$

jest sympleksem homotetycznym z sympleksem Δ^n poprzez homotetię o środku w barycentrum.

Jeśli $\beta > 1/(n+1)$, zbiór S_β jest pusty.

Jeśli $\beta = 1/(n+1)$, zbiór S_β redukuje się do punktu — barycentrum.

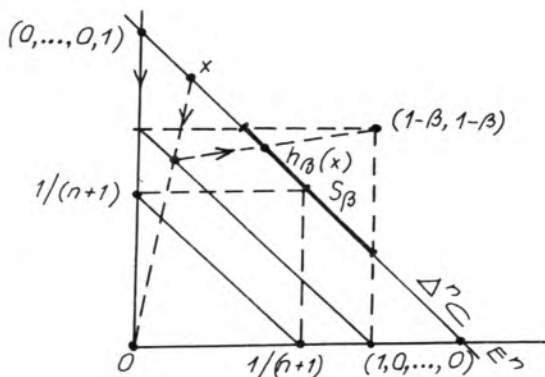
Jeśli $\beta \geq 0$, to $S_\beta \subset \Delta^n$; jeśli $\beta \leq 0$, to $S_\beta \supset \Delta^n$; jest $S_0 = \Delta^n$.

Homotetię — nazwijmy ją h_β — przeprowadzającą Δ^n w S_β — jest tylko jedna taka homotetia — ilustruje rys. 43.

Jeśli $r: E^n \rightarrow \Delta^n$ jest retrakcją kanoniczną na Δ^n , to odwzorowanie

$$h_\beta \circ r \circ h_\beta^{-1}: E^n \rightarrow S_\beta$$

jest retrakcją E^n na S_β (rozumiejąc, że h_β jest opisaną wyżej homotetią całej przestrzeni E^n — hiperpłaszczyzny $x_0 + \dots + x_n = 1$ przestrzeni E^{n+1}).



Rys. 43. Homotetia h_β . Przypadek $\beta > 0$

* * *

Sympleksy podziału barycentrycznego mają średnice nie większe niż $n/(n+1)$ średnicy sympleksu $\Delta(S)$; dla sympleksu wymiaru 1 współczynnik ten wynosi $1/2$, co widać bezpośrednio, a dla sympleksu wymiaru 2 wynosi $2/3$, co jest dobrze znanym faktem z geometrii trójkąta. Zapowiedziane oszacowanie będzie wynikiem dwu następujących lematów.

Lemat 1. Średnica sympleksu jest równa największej odległości wierzchołków.

D o w ó d. Niech a i b należą do $\Delta(a_0, \dots, a_n)$. Niech $a = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n$; jest wtedy $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$ i $\lambda_j \geq 0$ dla każdego j . Mamy $|b - a| = |b - (\lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n)| = |\lambda_0(b - a_0) + \dots + \lambda_n(b - a_n)| \leq \lambda_0|b - a_0| + \dots + \lambda_n|b - a_n| \leq \max_i |b - a_i|(\lambda_0 + \dots + \lambda_n) = \max_i |b - a_i|$.

Niech j będzie takie, że $|b - a_j| = \max_i |b - a_i|$.

Mamy $|b - a| \leq b - a_j$.

Pokazaliśmy, że

(*) odległość między punktami sympleksu jest nie większa niż odległość dowolnego z tych punktów od jednego z wierzchołków sympleksu.

Stosując oszacowanie (*) dla b i a_j , otrzymamy $|b - a_j| \leq |a_k - a_j|$ dla pewnego k , a w rezultacie $|b - a| \leq |a_k - a_j|$ dla pewnych k i j .

Lemat 2. Największa wśród odległości wierzchołków sympleksu $\Delta(b_0, \dots, b_n)$ nie przekracza $n/(n+1)$ średnicy sympleksu $\Delta(S)$.

D o w ó d. Niech b_i oraz b_j będą wierzchołkami sympleksu $\Delta(b_0, \dots, b_n)$; przyjmijmy, że $i < j$. Weźmy pod uwagę ścianę $\Delta(b_0, \dots, b_j)$ sympleksu $\Delta(b_0, \dots, b_n)$. Na mocy oszacowania z dowodu lematu 1 (stosowanego do tej ściany, która jest sympleksem podziału barycentrycznego sympleksu $\Delta(a_0, \dots, a_j)$), mamy $|b_j - b_i| \leq |b_j - a_k|$ dla pewnego k , $0 \leq k \leq j$. Mamy dalej: $|b_j - a_k| = |(1/(j+1)(a_0 + \dots + a_j) - a_k)| = 1/(j+1) |(a_0 - a_k) + \dots + (a_j - a_k)| \leq$

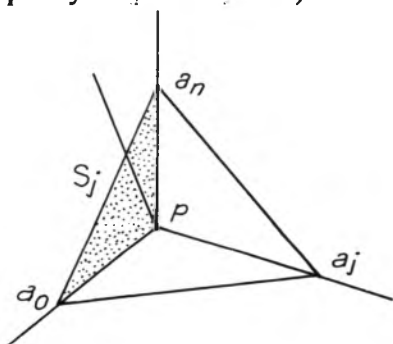
$\leq (1/(j+1))(|a_0 - a_k| + \dots + |a_j - a_k|)$; wśród różnic $a_j - a_k$ co najmniej jedna jest równa 0; stąd, $|b_j - a_k| \leq (j/(j+1)) |a_m - a_k|$ dla pewnego m , $0 \leq m \leq j$. Korzystając z lematu 1, wnioskujemy stąd, że $|b_j - b_i| \leq (j/(j+1)) |a_m - a_k| \leq (n/(n+1)) \text{diam } \Delta(S)$, dostajemy żądany wniosek: $\text{diam } \Delta(b_0, \dots, b_n) \leq (n/(n+1)) \text{diam } \Delta(S)$.

Ponieważ $(n/(n+1))^r \rightarrow 0$, jeśli $r \rightarrow \infty$, więc iterując podział barycentryczny, dostaniemy podział sympleksu $\Delta(S)$ na sympleksy o średnicy nie przekraczającej z góry danej liczby. Dokonując kolejnych podziałów, sympleksy w każdej ustalonej iteracji zachowują najistotniejsze własności wzajemnego położenia: *przekrój każdego z dwóch jest ich wspólną ścianą, a każdy sympleks $(n-1)$ -wymiarowy jest wspólną ścianą dwu sympleksów n -wymiarowych, chyba że jest zawarty w ścianie sympleksu $\Delta(S)$.*

Podział przestrzeni E^n na sektory.

Danych jest $n+1$ półprostych w E^n wychodzących z jednego punktu. Nazwijmy ten punkt p . Ma on tę własność, że po wyborze punktów a_0, \dots, a_n na tych półprostych punkt p leży we wnętrzu sympleksu $\Delta^n = \Delta(a_0, \dots, a_n)$, tj. ma dodatnie współrzędne barycentryczne względem a_0, \dots, a_n .

Zbiór S_j punktów leżących na półprostych wychodzących z p i przechodzących przez punkty ściany sympleksu Δ^n leżącej naprzeciw wierzchołka a_j nazwijmy j -tym sektorem przestrzeni E^n , wyznaczonym przez danych $n+1$ półprostych (patrz rys. 44).



Rys. 44. Sektory

Przekroje $S_j \cap \Delta^n$ tworzą konfigurację postaci 2 ze s. 50.

Przedłużmy półproste pa_j wstecz do przecięcia się ze ścianami naprzeciw a_j . Otrzymane punkty p_j tworzą sympleks i punkt p leży we wnętrzu tego sympleksu.

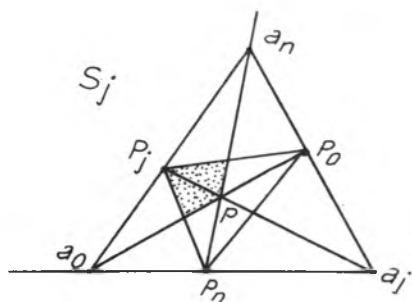
Dowody polegają na przeliczeniach przy użyciu współrzędnych barycentrycznych.

Przekroje sympleksu $\Delta(p_0, \dots, p_n)$ z sektorami S_j dają konfigurację postaci 1 (ze s. 50) w tym sympleksie (rys. 45).

* * *

Triangulacją nazwiemy każdą rodzinę skończoną K sympleksów, położonych jak dotąd w ustalonej przestrzeni X (wektorowej z normą), taką, że:

- (11) jeśli sympleks należy do K , to należą do K wszystkie jego ściany,
- (12) przekrój $\Delta \cap \Delta'$ dwóch sympleksów należących do K jest wspólną ścianą sympleksów Δ i Δ' , chyba że jest pusty.

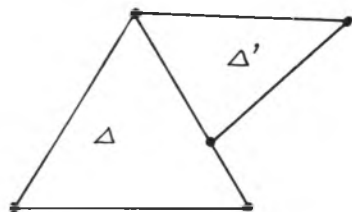


Rys. 45. Konfiguracje w sympleksie (p_0, \dots, p_n) przypominające przyczółki

Przykładem triangulacji jest zbiór wszystkich ścian sympleksu. Innym przykładem jest zbiór sympleksów i wszystkich ścian podziału barycentrycznego sympleksu. Nie jest triangulacją zbiór sympleksów przedstawionych na rys. 46.

Suma mnogościowa $|K|$ wszystkich sympleksów triangulacji K z topologią dziedziczną z X jest nazywana *bryłą* triangulacji K .

W ten sposób określona bryła zależy od przestrzeni X , w której leżą sympleksy triangulacji. Okazuje się, że zależność ta znika, jeśli bryły traktuje się z dokładnością do homeomorfizmu.



Rys. 46. Zbiór sympleksów nie tworzący triangulacji: przekrój sympleksów Δ i Δ' nie jest ścianą sympleksu Δ

Rozważane w poprzednim wykładzie grafy i łamane są bryłami triangulacji, w których występują sympleksy jedynie wymiarów 0 i 1.

* * *

Jeśli K i L są triangulacjami, to odwzorowanie $h: K^0 \rightarrow L^0$ zbioru ich wierzchołków nazywa się *symplicjalnym*, jeśli stąd, że sympleks $\Delta(S)$ należy do K , wynika, że sympleks $\Delta(h(S))$ należy do L .

Triangulacje K i L nazwiemy *izomorficznymi*, jeśli istnieje odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne h zbiorów ich wierzchołków takie, że zarówno h , jak i h^{-1} są odwzorowaniami symplicjalnymi. Odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne zbiorów wierzchołków triangulacji, spełniające ten warunek, będzie nazwane *izomorfizmem triangulacji*.

Izomorfizm h triangulacji K i L wyznacza homeomorfizm $|h|: |K| \rightarrow |L|$ brył tych triangulacji, określony jak następuje.

Niech $a \in |K|$. Punkt a należy do pewnego sympleksu $\Delta(a_0, \dots, a_n)$ triangulacji K . Jest wtedy $a = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n$, gdzie $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$ i $\lambda_j \geq 0$.

Przyjmijmy $|h|(a) = \lambda_0 h(a_0) + \dots + \lambda_n h(a_n)$.

Na mocy (13), $|h|(a)$ jest punktem sympleksu $\Delta(h(a_0), \dots, h(a_n))$ należącego do L , stąd $|h|(a) \in |L|$. Wartość $|h|(a)$ nie zależy od wyboru sympleksu, do którego należy a (można ją wyznaczyć, biorąc najmniejszy sympleks, do

którego należy *a*). Odwzorowanie $|h|$ jest homeomorfizmem po obcięciu do jakiegokolwiek sympleksu triangulacji K ; obrazem jest odpowiedni sympleks triangulacji L . Odwzorowanie $|h|$ jest wzajemnie jednoznaczne na $|K|$; jest ciągle jako zesztukowanie odwzorowań ciągłych.

* * *

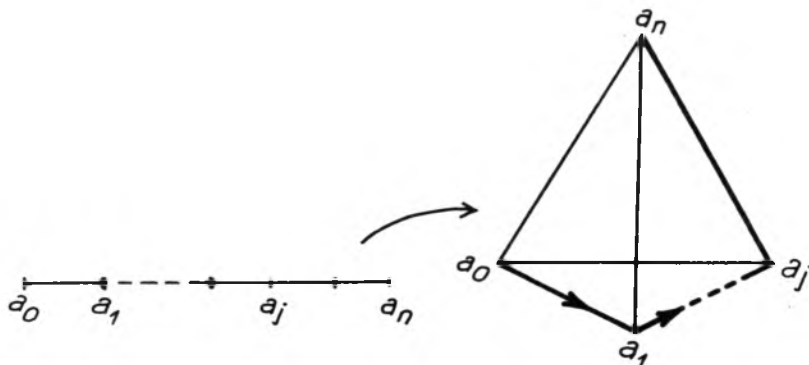
Triangulacje lokowaliśmy dotąd w bliżej nieokreślonej przestrzeni wektorowej X . Okazuje się, że każda triangulacja jest izomorficzna z triangulacją, której sympleksy leżą w pewnej przestrzeni euklidesowej, tj. *daje się zrealizować w przestrzeni euklidesowej*.

Jest wiele sposobów takich realizacji, spośród których wyróżniają się dwa.

Pierwsze twierdzenie o realizacji. Niech K będzie triangulacją, której zbiorem wierzchołków jest zbiór $K^0 = \{a_0, \dots, a_n\}$. Triangulacja K jest izomorficzna z triangulacją złożoną z pewnych ścian sympleksu wzorcowego Δ^n .

D o w ó d. Niech $h: \{a_0, \dots, a_n\} \rightarrow \{e_0, \dots, e_n\}$ (przez e_i oznaczamy wierzchołki sympleksu wzorcowego Δ^n) będzie odwzorowaniem danym wzorem $h(a_i) = e_i$. Rozważmy triangulację L zawartą w triangulacji złożonej z wszystkich ścian sympleksu Δ^n , zaliczając do L te ściany $\Delta(e_{i_0}, \dots, e_{i_k})$ sympleksu Δ^n , dla których $\Delta(a_{i_0}, \dots, a_{i_k})$ jest sympleksem triangulacji K . Widać, że L jest rzeczywiście triangulacją i że jest spełniony warunek (13), więc h jest izomorfizmem $K \rightarrow L$.

Realizacja ta, jakkolwiek prosta i bardzo przydatna, ponieważ lokuje bryłę triangulacji w jednym sympleksie, jest mało oszczędna co do wymiaru przestrzeni euklidesowej, w którą zanurzamy bryłę triangulacji. Na przykład triangulację odcinka wyznaczoną przez punkty $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ prostej realizujemy w ten sposób dopiero w sympleksie n -wymiarowym (położonym w E^{n+1}), mimo że na mocy określenia realizuje się ona już na prostej.



Rys. 47. Pierwsze twierdzenie o realizacji

Przez *wymiar triangulacji* rozumie się największy z wymiarów sympleksów tej triangulacji.

Drugie twierdzenie o realizacji. *Triangulacja wymiaru n jest izomorficzna z pewną triangulacją złożoną z sympleksów położonych w przestrzeni euklidesowej E^{2n+1} .*

Dowód wymaga pewnego przygotowania.

Mówi się, że punkty przestrzeni euklidesowej E^r mają *położenie ogólne*, jeśli żadne k spośród nich, gdzie $k \leq r+1$, nie leży na hiperpłaszczyźnie wymiaru $k-2$ (żadne z trzech nie leży na jednej prostej, żaden z czterech nie leży na jednej płaszczyźnie itp.); przypadkowo wybrana skończona ilość punktów w E^r powinna mieć, zgodnie z prawami prawdopodobieństwa, położenie ogólne. Jeśli punkty traktować jako wektory w przestrzeni E^{r+1} , w której przestrzeń E^r jest położona jako hiperpłaszczyzna $x_0 + \dots + x_r = 1$, to położenie ogólne punktów tłumaczy się w następujący sposób na *położenie ogólne wektorów*: zbiory złożone z nie więcej niż $r+1$ wektorów są liniowo niezależne.

Lemat. *Jeśli S jest zbiorem skończonym w E^r , to dla każdego $\varepsilon > 0$ można wybrać w kulach $K(a, \varepsilon)$, $a \in S$, punkty $p(a)$ tak, by były one ze sobą w położeniu ogólnym; inaczej: każdy zbiór skończony można przeprowadzić w położenie ogólne, nie przesuwając jego punktów więcej niż na daną z góry odległość.*

Dowód. Niech $S = \{a_0, \dots, a_n\} \subset E^r$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dane. Przyjmijmy $p(a_0) = a_0$. Załóżmy, że wybraliśmy już punkty $p(a_0), \dots, p(a_k)$ w położeniu ogólnym takie, że $p(a_i)$ jest odległe od a_i mniej niż o ε . Weźmy pod uwagę wszelkie hiperpłaszczyzny wymiaru $r-1$ wyznaczone przez te punkty; jest ich skończenie wiele i każda z nich jest podzbiorem rzadkim w E^r . Istnieje więc punkt $p(a_{k+1})$ w odległości $< \varepsilon$ od a_{k+1} leżący poza tymi hiperpłaszczyznami. Ten wybór punktu $p(a_{k+1})$ i założenie indukcyjne zapewniają, że punkty $p(a_0), \dots, p(a_k), p(a_{k+1})$ są w położeniu ogólnym w E^r . Po skończonej ilości kroków, nie przekraczającej ilości punktów w S , dostaniemy zapowiadany zbiór punktów w E^r w położeniu ogólnym.

Dowód twierdzenia⁽⁵⁾. Niech K będzie daną triangulacją wymiaru n . Zbiór K^0 wierzchołków triangulacji zanurzamy w przestrzeni E^{2n+1} tak, by jego punkty były w położeniu ogólnym, co można zrobić wobec dowiedzonego lematu. Niech h będzie odpowiednim zanurzeniem. Określamy triangulację L w E^{2n+1} , zaliczając do L te wszystkie sympleksy $\Delta(h(a_0), \dots, h(a_k))$, dla których $\Delta(a_0, \dots, a_k)$ jest sympleksem triangulacji K .

Należy sprawdzić, że L jest rzeczywiście triangulacją.

⁽⁵⁾ Ten dowód zamieszcza między innymi P.S. Aleksandrow, *Kombinatornaja topologia*, 1947, s. 157 i s. 646—647. Inny dowód, dający konkretną realizację, wykorzystujący wyznacznik Vandermonde'a, można znaleźć między innymi w *Homology theory* P.J. Hiltona i S. Wyliego, Cambridge University Press 1960, s. 43—44.

Niech $\Delta(a_0, \dots, a_k)$ i $\Delta(b_0, \dots, b_m)$ będą sympleksami triangulacji K . Ponieważ triangulacja K ma wymiar n , więc $k + m \leq 2n$. Stąd, zbiór

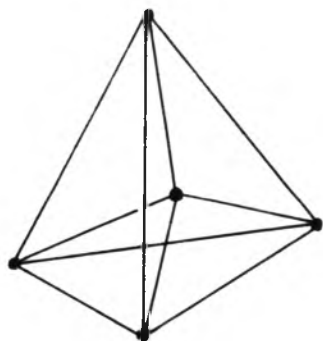
$$(13) \quad h(a_0), \dots, h(a_k), h(b_0), \dots, h(b_m)$$

ma co najwyżej $2n + 2$ elementy. Ponieważ punkty zbioru $h(K^0)$ są w położeniu ogólnym w E^{2n+1} , więc punkty (13) są wierzchołkami pewnego sympleksu w E^{2n+1} , bo — traktowane jako wektory — są liniowo niezależne. Sympleksy $\Delta(h(a_0), \dots, h(a_k))$ i $\Delta(h(b_0), \dots, h(b_m))$ przecinają się więc według reguł, jakim podlegają ściany sympleksu: przekrój jest ich wspólną ścianą. Ponieważ sympleksy w L są zawsze tej postaci jak dwa sympleksy rozważane wyżej, warunek (12), wymagany dla triangulacji, jest spełniony przez L ; spełnianie przez L warunku (11) jest oczywiste.

To kończy również dowód twierdzenia, bo odwzorowanie h jest izomorfizmem $K \rightarrow L$.

Dowodzonego twierdzenia nie da się poprawić⁽⁶⁾: dla każdego n istnieją triangulacje n -wymiarowe nie dające się zrealizować w E^{2n} , na przykład triangulacja składająca się ze ścian wymiaru $\leq n$ sympleksu Δ^{2n+2} (szkielet n -wymiarowy sympleksu Δ^{2n+2}). Rysunek ilustruje przypadek $n = 1$.

* * *



Rys. 48. Graf, w którym pięć punktów łączy się każdy z każdym, jest znany z wykładu 2 (s. 54)

Przez podział barycentryczny triangulacji K rozumiemy zbiór sympleksów powstałych przez podziały barycentryczne sympleksów należących do K . Podziały barycentryczne można iterować, otrzymując coraz drobniejsze triangulacje tej samej bryły $|K|$.

Bryły triangulacji są nazywane wielościanami⁽⁷⁾. Według tego określenia wielościan jest dany zawsze wraz z pewną triangulacją.

Jeśli dwa wielościany mają izomorficzne ze sobą triangulacje, to są homeomorficzne.

Wynikanie odwrotne stwarza problem: czy wielościany homeomorficzne mają wśród swoich triangulacji triangulacje izomorficzne? Odpowiedź twierdząca wynikałaby

z *Hauptvermutung* — hipotezy podstawowej topologii wielościanów — według której dane triangulacje wielościanów homeomorficznych mają izomorficzne ze sobą podpodziały. Jakkolwiek prawdziwość tej hipotezy została w szcze-

⁽⁶⁾ A. Flores, *Über n -dimensionale Komplexe die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind*, *Ergebniss eines math. Koll.* 6 (1935), 4—6.

⁽⁷⁾ Jest to określenie przyjęte na użytek działu topologii, który tu jest wykładany. Nie jest znana charakterystyka topologiczna wielościanów.

gólnych przypadkach potwierdzona⁽⁸⁾, to jednak w ogólności — w wysokich wymiarach — okazała się fałszywa. Prawdziwość hipotezy podstawowej upraszczałaby istotnie teorię (symplicjalną) wielościanów: własności triangulacji przechodzące na podpodziały dowiedzione dla jednej triangulacji, obowiązywałyby dla wszelkich triangulacji wielościanów homeomorficznych z danym.

Wyrażenie figurujące po lewej stronie wzoru Eulera jest nazywane *charakterystyką Eulera triangulacji*, które — jeśli nie ograniczać się do wymiaru 2 — przypisuje triangulacji T liczbę

$$\chi(T) = \sum (-1)^k \alpha_k,$$

gdzie α_k jest ilością sympleksów wymiaru k triangulacji T . Jeśli moglibyśmy dowieść, że ta liczba zachowuje się przy przejściu do podpodziałów triangulacji, to z prawdziwości *Hauptvermutung* wynikałoby, że charakterystyka Eulera zależy jedynie od typu topologicznego wielościanu, a nie od doboru triangulacji⁽⁹⁾.

* * *

Niech K będzie triangulacją złożoną z pewnych ścian sympleksu $\Delta(a_0, \dots, a_n)$. Przez gwiazdę wierzchołka a w bryle $|K|$ tej triangulacji rozumiemy zbiór

$$gw_{|K|}a = |K| \cap gw_{\Delta(a_0, \dots, a_n)}a,$$

jest to zbiór otwarty w $|K|$.

Lemat. Sympleks $\Delta(a_{i_0}, \dots, a_{i_k})$ należy do K wtedy i tylko wtedy, gdy

$$gw_{|K|}a_{i_0} \cap \dots \cap gw_{|K|}a_{i_k} \neq \emptyset.$$

Dowód. Jeśli sympleks $\Delta(a_{i_0}, \dots, a_{i_k})$ należy do K , to przekrój gwiazd w $|K|$ jego wierzchołków jest niepusty, bo należy doń na przykład barycentrum wspomnianego sympleksu. Na odwrót, jeśli $gw_{|K|}a_{i_0} \cap \dots \cap gw_{|K|}a_{i_k} \neq \emptyset$, to istnieje w $|K|$ punkt a , dla którego wszystkie współrzędne barycentryczne $\lambda_{i_0}(a), \dots, \lambda_{i_k}(a)$ są dodatnie. Sympleks $\Delta(a_{i_0}, \dots, a_{i_k})$ okazuje się w ten sposób ścianą pewnego sympleksu należącego do K , sam więc też należy do K .

⁽⁸⁾ Dla wielościanów wymiaru 2, będących rozmaitościami *Hauptvermutung*, potwierdza się; dowód jest naszkicowany np. u H. Zieschanga, E. Vogta i H.-D. Caldeweya, *Powierchności i rozrywne grupy*, Moskwa 1988, na s. 255 i dalszych; wydanie oryginalne, Springer 1980, 1981. Dowód dla rozmaitości wymiaru 3 można znaleźć u E. E. Moise'a w *Geometric topology*, Springer 1977, s. 253. W wyższych wymiarach *Hauptvermutung* okazała się fałszywa.

⁽⁹⁾ Mimo fałszywości *Hauptvermutung* charakterystyki Eulera wielościanów homeomorficznych są równe. Dowód można znaleźć np. we *Wstępie do topologii algebraicznej* S. Pontriagina, Warszawa 1961, s. 59 (wzór wyrażający charakterystykę Eulera w postaci sumy, ze znakami na przemian, liczb Bettiego) i s. 105 (niezmienność topologiczna liczb Bettiego).

Niech K i L będą triangulacjami. Odwzorowanie symplecjalne $h: K^0 \rightarrow L^0$ zbioru wierzchołków wyznacza odwzorowanie $|h|: |K| \rightarrow |L|$ brył tych triangulacji dane wzorem $|h|(a) = \lambda_0 h(a_0) + \dots + \lambda_k h(a_k)$ dla punktów $\lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_k a_k$ sympleksu $\Delta(a_0, \dots, a_k)$. Odwzorowanie $|h|$ jest ciągle (patrz uwaga na s. 54).

Każde odwzorowanie ciągle wielościanów daje się aproksymować z dowolną dokładnością odwzorowaniami symplecjalnymi. W dowodzie tego twierdzenia wielościan będzie przedstawiany jako bryła triangulacji złożonej z pewnych ścian sympleksu, zgodnie z pierwszym twierdzeniem o realizacji.

Twierdzenie o aproksymacji symplecjalnej. *Jeśli $f: |K| \rightarrow |L|$ jest odwzorowaniem ciągłym bryły triangulacji K w bryłę triangulacji L , to istnieje podział K' triangulacji K (w istocie, pewna iteracja podziału barycentrycznego triangulacji K) i odwzorowanie symplecjalne g triangulacji K' w triangulację L takie, że dla każdego x wartości $f(x)$ i $|g|(x)$ należą do jednego i tego samego sympleksu triangulacji L (co między innymi znaczy, że odległość odwzorowań f i $|g|$ nie przekracza maksimum średnic sympleksów triangulacji L).*

D o w ó d. Zbiory $f^{-1}(gw_{|L|}b)$, gdzie b przebiega wierzchołki triangulacji L , są otwarte i pokrywają $|K|$. Niech δ ($\delta > 0$) będzie liczbą Lebesgue'a dla tego pokrycia (o liczbie Lebesgue'a por. Aneks).

Niech K' będzie na tyle daleką iteracją podziału barycentrycznego triangulacji K , aby $\text{diam } gw_{|K'|}a < \delta$ dla każdego wierzchołka a triangulacji K . Wtedy (własność liczby Lebesgue'a) dla każdego wierzchołka a triangulacji K' istnieje wierzchołek b triangulacji L taki, że

$$gw_{|K'|}a \subset f^{-1}(gw_{|L|}b).$$

Weźmy dla każdego a jedno z tych b , dla których inkluzja jest spełniona; oznaczmy to b przez $b(a)$. Przyporządkowanie $a \rightarrow b(a)$ określa odwzorowanie $K^0 \rightarrow K^0$ zbiorów wierzchołków triangulacji K' i L .

Odwzorowanie to, oznaczmy je przez g , jest odwzorowaniem symplecjalnym K w L .

Istotnie, niech S będzie zbiorem wierzchołków sympleksu należącego do K' . Na mocy lematu jest wtedy:

$$\bigcap \{gw_{|K'|}a : a \in S\} \neq \emptyset.$$

Wykażemy, że punkty $b(a)$, gdzie $a \in S$, są wierzchołkami sympleksu triangulacji L . W tym celu, wobec lematu, wystarczy sprawdzić, że przekrój gwiazd w $|L|$ tych punktów jest niepusty; wynika to z obliczenia:

$$f^{-1}\left(\bigcap \{gw_{|L|}b(a) : a \in S\}\right) = \bigcap \{f^{-1}(gw_{|L|}b(a)) : a \in S\} \supset \bigcap \{gw_{|K'|}a : a \in S\} \neq \emptyset$$

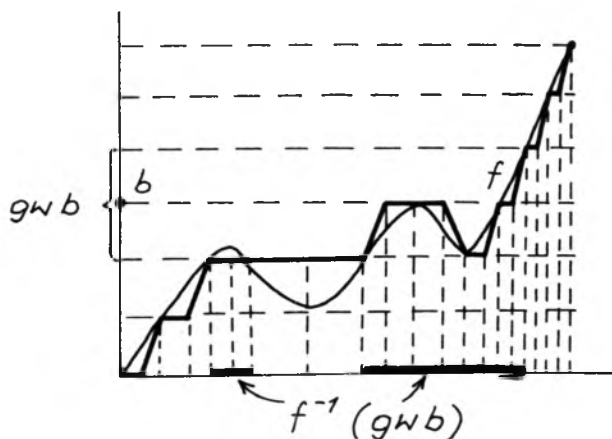
(inkluzję dostaje się z (12) po podstawieniu za b wartości $b(a)$).

Odwzorowanie $|g|$ jest zapowiedzianym odwzorowaniem aproksymującym f .

Istotnie, niech $x \in |K'|$. Wtedy $x = \lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n$, $\lambda_i > 0$, $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$, dla pewnego sympleksu $\Delta(a_0, \dots, a_n)$ triangulacji K' . Mamy $|g|(x) = \lambda_0 b(a_0) + \dots + \lambda_n b(a_n)$. Z drugiej strony, $x \in gw_{|K'|} a_0 \cap \dots \cap gw_{|K'|} a_n \subset f^{-1}(gw_{|L|} b(a_0) \cap \dots \cap gw_{|L|} b(a_n))$, skąd $f(x) \in gw_{|L|} b(a_0) \cap \dots \cap gw_{|L|} b(a_n)$. Z tych dwu rzeczy wynika, że zarówno punkty $|g|(x)$, jak i $f(x)$ należą do sympleksu triangulacji L , którego wierzchołkami są punkty $b(a_0), \dots, b(a_n)$ i być może jeszcze inne (punkt $|g|(x)$ należy wprost do sympleksu $\Delta(b(a_0), \dots, b(a_n))$).

Twierdzenie o aproksymacji symplecjajnej daje możliwość dowolnie dokładnej aproksymacji: jeśli chcemy mieć aproksymację z dokładnością do danej liczby $\varepsilon > 0$, należy posłużyć się triangulacją L , której sympleksy mają średnicę $\leq \varepsilon$; taką triangulację można otrzymać rozdrabniając barycentrycznie daną triangulację określającą wielościan dostatecznie wiele razy.

Twierdzenie o aproksymacji symplecjajnej jest nietrywialne już dla funkcji ciągłych $f: I \rightarrow I$ (I jest odcinkiem rzeczywistym). Aby uzyskać aproksymację symplecjajną funkcji f z dokładnością do danego $\varepsilon > 0$, trzeba wziąć jakikolwiek podział L odcinka wartości na odcinki o długości $\leq \varepsilon$ i zastosować postępowanie z dowodu twierdzenia; wyjściowym podziałem odcinka zmiennej niezależnej może być podział K złożony z tego odcinka i jego końców.



Rys. 49. Aproksymacja symplecjajna funkcji rzeczywistej

W języku przestrzeni funkcji można dowiedzione twierdzenie wypowiedzieć krócej (choć mniej dokładnie): w przestrzeni odwzorowań ciągłych wielościanu w wielościan odwzorowania symplecjajne stanowią podzbiór gęsty. Podzbiór gęsty stanowią już odwzorowania symplecjajne ciągu podziałów barycentrycznych danej triangulacji, a więc pewien zbiór przeliczalny odwzorowań. Stąd, przestrzeń odwzorowań ciągłych wielościanu w wielościan jest ośrodkowa.

W tezie twierdzenia o aproksymacji symplecjajnej ważne jest to, że $f(x)$ i $|g|(x)$ należą do jednego i tego samego sympleksu triangulacji L . Wynika

stąd bowiem, że $f(x)$ i $|g|(x)$ są końcami odcinka $tf(x) + (1-t)|g|(x)$, $0 \leq t \leq 1$, zawartego w tym sympleksie. Znaczy to, że odwzorowania f i $|g|$ są *homotopijne*.

Odwzorowania $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ są nazywane *homotopijnymi*, jeśli istnieje odwzorowanie ciągle $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, nazywane *homotopią*, takie, że $H(x, 0) = f_0(x)$ i $H(x, 1) = f_1(x)$ dla każdego x . W przypadku odwzorowań f i $|g|$ homotopią jest odwzorowanie dane wzorem $H(x, t) = tf(x) + (1-t)|g|(x)$.

W jednym z dalszych wykładów pojęcie homotopii będzie omówione bardziej systematycznie.

Twierdzenie o aproksymacji symplecjoidalnej pochodzi z pracy Brouwera (1912)⁽¹⁰⁾, chociaż nie jest tam sformułowane jako twierdzenie. Jest metodą dowodów sprowadzających pewne zagadnienia dotyczące odwzorowań ciągłych przestrzeni i sfer euklidesowych do odwzorowań symplecjoidalnych, a więc do zagadnień geometrii i kombinatoryki.

Twierdzenie uogólnia się na przypadek, kiedy na podkompleksie dane odwzorowanie jest symplecjoidalne i aproksymacja nie zmienia tej części odwzorowania; por. Zeeman (1964)⁽¹¹⁾.

* * *

Gwiazdy wierzchołków kompleksu symplecjoidalnego K są podzbiorami otwartymi bryły $|K|$ i stanowią jej pokrycie. Przypomnijmy, że jeśli a_1, \dots, a_r są wierzchołkami kompleksu K , to (por. lemat poprzedzający twierdzenie o aproksymacji symplecjoidalnej) z tego, że $gw_{|K|} a_1 \cap \dots \cap gw_{|K|} a_r \neq \emptyset$ wynika, że sympleks $\Delta(a_1, \dots, a_r)$ należy do K .

Jeśli więc wymiar sympleksów należących do K nie przekracza n , to każdy punkt bryły $|K|$ należy do nie więcej niż $n+1$ elementów pokrycia $\{gw_{|K|} a : a \in K\}$.

Z kolei, jeśli weźmie się pod uwagę, że triangulacje można dowolnie rozdrabniać, a przy przejściu do rozdrobnień wymiar sympleksów nie wzrasta, to dochodzimy do wniosku, że *wielościan wymiaru $\leq n$ ma dowolnie drobne pokrycia (skończone) zbiorami otwartymi, takie że każdy punkt wielościanu leży w nie więcej niż $n+1$ elementach każdego z tych pokryć*. To spostrzeżenie pochodzi od Lebesgue'a (1911)⁽¹²⁾. Ma ono zasadnicze znaczenie dla topologii przestrzeni euklidesowych.

⁽¹⁰⁾ L. E. J. Brouwer. *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen 71 (1912), 97—115; w *Collected Works*, t. 2, s. 454—474.

⁽¹¹⁾ E. G. Zeeman, *Relative simplicial approximation*, Proc. Cambridge Philosophical Society 60 (1964), 34—43. Twierdzenie stosuje się między innymi — por. J. Jaworski, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences 12 (1964), 5—8, *The relative simplicial approximation theorem and its application to an elementary proof of the Poincaré-Brouwer theorem* — w dowodzie o niezaczesywalności sfer parzystowymiarowych.

⁽¹²⁾ Henri Lebesgue, *Sur la non applicabilité de deux domaines appartenant respectivement a deux espaces de n et $n+p$ dimensions*, Mathematische Annalen 70 (1911), 166—168.

ANEKS. Twierdzenia o funkcjach i pokryciach • Lemat Urysohna • Twierdzenie Tietzego • Uogólnienie na wyższe wymiary • Twierdzenie Tietzego dla odwzorowań w sfery • Zmniejszanie zbiorów w pokryciach • Liczba Lebesgue'a dla pokryć • Kostka Hilberta

Niech A będzie podzbiorem przestrzeni metrycznej X i niech x będzie punktem tej przestrzeni. Przez *odległość⁽¹⁾ punktu x od zbioru A ⁽²⁾* rozumiemy liczbę

$$d_A(x) = \inf \{d(x, a) : a \in A\},$$

gdzie d jest symbolem odległości punktów w X .

Twierdzenie. $d_A(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy x należy do domknięcia zbioru A .

Twierdzenie. $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$.

Dowód. Dla każdego a ze zbioru A mamy $d(x, a) \leq d(x, y) + d(a, y)$, skąd

$$d_A(x) \leq d(x, y) + d(a, y)$$

⁽¹⁾ Terminu *odległość* używa się zwykle w znaczeniu odległości elementów przestrzeni metrycznej. Tu robi się odstępstwo od tej zasady.

⁽²⁾ Jeśli zbiór A jest pusty, to wobec tak przyjętego określenia odległości punktu od zbioru pojawiają się kłopoty, ponieważ zbiór liczb $d(x, a)$, $a \in A$ jest teraz pusty. Każda liczba rzeczywista ogranicza zbiór pusty z dołu, nie ma więc wśród nich liczby największej, chyba że za taką będziemy uważać $+\infty$. Na temat kłopotów ze zbiorem pustym por. artykuł A. Wiwegera, *Kłopoty ze zbiorem pustym*, Wiadomości Matematyczne 11 (1970), 187—199.

dla każdego a ze zbioru A . Nierówność się utrzyma, jeśli (po prawej stronie) przejść do infimum po a należących do A . Dostaniemy

$$d_A(x) \leq d(x, y) + d_A(y),$$

tj.

$$d_A(x) - d_A(y) \leq d(x, y).$$

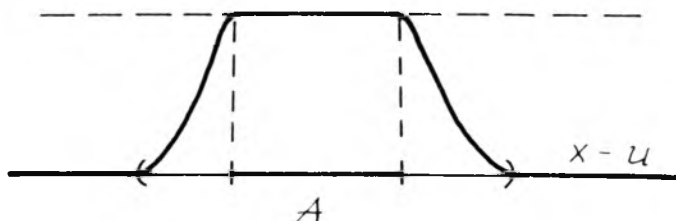
Wobec symetrii założeń co do x i y mamy

$$d_A(y) - d_A(x) \leq d(x, y),$$

co prowadzi do $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$.

Wniosek. d_A jest — jako funkcja nie zwiększająca odległości — funkcją ciągłą.

Lemat Urysohna⁽³⁾. Jeśli A jest podzbiorem domkniętym, a U podzbiorem otwartym przestrzeni metrycznej X i jest przy tym $A \subset U$, to istnieje funkcja ciągła $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$ taka, że $\varphi(x) = 1$ dla $x \in A$ i $\varphi(x) = 0$ dla $x \in X - U$.



Rys. 50. Lemat Urysohna

D o w ó d. Jedną z tego rodzaju funkcji jest funkcja określona wzorem

$$\varphi(x) = \frac{d_{X-U}(x)}{d_{X-U}(x) + d_A(x)}$$

dla $x \in X$. Poprawność wzoru i spełnianie wymaganych warunków liczbowych zapewnia pierwsze z twierdzeń. Drugie zapewnia ciągłość.

⁽³⁾ Nazwa lematu jest umowna. W zakresie ogólności tu przyjętej (przestrzenie metryczne) wszystkie twierdzenia tego wykładu bądź pochodzą z twierdzeń Tietzego, bądź są jego konsekwencjami: H. T i e t z e, *Über Funktionen die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind*, Journal für reine und angewandte Mathematik 145 (1915), 9—14. Z lematu (w przytoczonym tu brzmieniu) wynika normalność przestrzeni metrycznych. Prawdziwość lematu przenosi się na przestrzenie normalne, ale dowód jest wtedy znacznie trudniejszy: to twierdzenie nazywa się już *lematem Urysohna*; P. U r y s o h n, *Zum Metrizationsproblem*, Mathematische Annalen 94 (1925), 309—315; przekład ros.: *Trudy po topologii i drugim oblast'jam matematiki*, t. II, s. 740—746; por. wszakże twierdzenie Łuzina-Mieńskiego zamieszczone jako środek dowodowy w pracy W. S. B o g o m o ł o w e j, *Matematicheskij Sbornik* 32 (1924), 152—169.

Wniosek. Mając zbiór domknięty A i zbiór otwarty U takie, że $A \subset U$, można znaleźć zawsze zbiór otwarty V taki, że

$$A \subset V \subset \bar{V} \subset U$$

(kreska nad symbolem zbioru oznacza domknięcie).

Dowód. Jednym z zapowiedzianych zbiorów jest

$$V = \{x \in X: \varphi(x) > 1/2\},$$

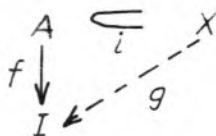
gdzie φ jest funkcją istniejącą dla zbiorów A i U na mocy lematu Urysohna. Zbiór V jest otwarty wobec ciągłości φ , zawiera A , a jego domknięcie jest zawarte w U , będąc zawarte w zbiorze $\{x \in X: \varphi(x) \geq 1/2\}$.

Przestrzenie topologiczne, dla których prawdziwe jest stwierdzenie będące treścią tego wniosku, są nazywane *normalnymi*; zakłada się przy tym własność T_1 : domkniętość zbiorów jednopunktowych. Dla przestrzeni topologicznych zwartych (w sensie pokryciowym) normalność wynika już z warunku T_2 Hausdorffa: dwa punkty mają zawsze otoczenia rozłączne.

Treść ostatniego wniosku można więc przedstawić i tak: *przestrzenie metryczne są normalne*.

Twierdzenie Tietzego (1915)⁽⁴⁾. Jeśli A jest podzbiorem domkniętym przestrzeni metrycznej X i $f: A \rightarrow I$ jest funkcją ciągłą o wartościach w odcinku I prostej rzeczywistej, to istnieje funkcja ciągła $g: X \rightarrow I$ taka, że $g(x) = f(x)$ dla $x \in A$.

Sytuację ilustruje diagram



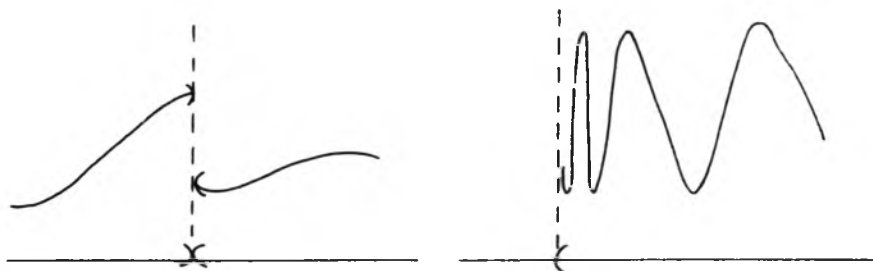
⁽⁴⁾ H. Tietze, *Über Funktionen...* Dowód podał również Brouwer w pracy *Über die Erweiterung des Definitionsbereich einer stetigen Funktion*, *Mathematische Annalen* 79 (1918), 209—211 (por. noty w *Collected Works* do innych wcześniejszych dowodów, s. 591—594). Zamieszczony tu dowód, który przeszedł do większości podręczników, pochodzi od Urysohna; P. Urysohn, *Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, *Mathematische Annalen* 94 (1925), 262—295 (w *Trudach...*, t. I, s. 177—218; sam dowód na s. 211, komentarze na s. 211). Dowód zbliżony do dowodu Tietzego z powołaniem się na F. Riesz'a i książkę H. Hahn'a, *Theorie der reellen Funktionen*, Leipzig 1921, s. 14 podaje B. von Kérékjártó w *Vorlesungen über Topologie*, 1923, s. 74; dla punktów x spoza zbioru A zwartego funkcję g przedłużającą daną funkcję f określa wzorem

$$g(x) = \max \left\{ \frac{d(x, A)}{d(x, y)} \cdot f(y) : y \in A \right\}.$$

zgodny, tj. taki, że $g \circ i = f$, w którym inkluzję $A \subset X$ traktuje się jako odwzorowanie określone wzorem $i(x) = x$ dla $x \in A$.

Odwzorowanie g nazywa się *przedłużeniem* odwzorowania f . Piszemy $g|_A = f$ zamiast $g \circ i = f$. Odwzorowanie może mieć wiele przedłużeń.

Oczywiście, bez założenia domkniętości zbioru A , nie ma mowy o prawdziwości twierdzenia. Oto dwa typowe przykłady funkcji ciągłych nieprze-
dłużalnych w sposób ciągły na punkt skupienia nie należący do zbioru.



Rys. 51. W dawniejszych podręcznikach analizy tego rodzaju funkcje, a także funkcje takie jak $1/x$ i $\tan x$, były nazywane nieciągłymi. Obecnie nie przydajemy sensu ciągłości i tym samym nieciągłości funkcji w punktach, w których nie jest ona określona

Lemat rachunkowy. Jeśli na podzbiorze domkniętym A przestrzeni metrycznej X jest określona funkcja ciągła f taka, że

$$-c \leq f(x) \leq c,$$

to istnieje funkcja ciągła g określona na X taka, że

$$-c/3 \leq g(x) \leq c/3 \quad \text{dla } x \in X$$

i taka, że

$$|f(x) - g(x)| \leq (2/3) \cdot c \quad \text{dla } x \in A.$$

Dowód lematu. Zbiory:

$M = \{x \in A : f(x) \leq -(1/3) \cdot c\}$ i $N = \{x \in A : f(x) \geq (1/3) \cdot c\}$ są domknięte w X (bo w A) i są rozłączne. Na mocy lematu Urysohna istnieje funkcja ciągła g określona na X taka, że $g(x) = -(1/3) \cdot c$ dla $x \in M$ i $g(x) = (1/3) \cdot c$ dla $x \in N$, i przy tym taka, że $|g(x)| \leq c/3$. Funkcja g spełnia zapowiedziane warunki.

Dowód twierdzenia. Przyjmijmy, że odcinkiem I jest odcinek $-1 \leq x \leq 1$.

Przez indukcję zbudujemy ciąg g_1, g_2, \dots funkcji ciągłych określonych na X takich, że

$$(1) \quad -(1/3) \cdot (2/3)^{n-1} \leq g_n(x) \leq (1/3) \cdot (2/3)^{n-1} \quad \text{dla } x \in X$$

i takich, że

$$(2) \quad |f(x) - (g_1(x) + \dots + g_n(x))| \leq (2/3)^n \text{ dla } x \in A.$$

Funkcję g_1 budujemy, korzystając z lematu rachunkowego dla danej funkcji f przy $c = 1$.

Mamy

$$|g_1(x)| \leq 1/3 \quad \text{dla } x \in X \quad \text{i} \quad |f(x) - g_1(x)| \leq 2/3 \quad \text{dla } x \in A.$$

Założmy, że funkcje g_1, \dots, g_n , spełniające warunki (1) i (2), są już zbudowane. Aby zbudować kolejną funkcję g_{n+1} , skorzystamy z lematu rachunkowego dla funkcji $f - (g_1 + \dots + g_n)$ w miejscu f i dla $c = (2/3)^n$.

Dla tak uzyskanej funkcji g_{n+1} mamy

$$|g_{n+1}(x)| \leq (1/3) \cdot (2/3)^n \text{ dla } x \in X$$

oraz

$$|f(x) - (g_1(x) + \dots + g_n(x)) - g_{n+1}(x)| \leq (2/3) \cdot (2/3)^{n+1}.$$

Funkcje g_1, \dots, g_n, g_{n+1} spełniają warunki (1) i (2) dla $n+1$ w miejscu n .

Konstrukcja indukcyjna ciągu g_1, g_2, \dots została zakończona.

Wobec (1) szereg funkcji g_n jest jednostajnie zbieżny do funkcji ograniczonej przez 1 co do wartości bezwzględnej. Funkcja $g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \dots$, ciągła, spełnia warunki zapowiedziane w tezie twierdzenia; równość $f(x) = g(x)$ dla $x \in A$ wynika z oszacowania (2).

Twierdzenie Tietzego przenosi się na odwzorowania w kostki euklidesowe $I^n = I \times \dots \times I$ (n razy) dowolnego wymiaru n .

Twierdzenie. *Jeśli A jest podzbiorem domkniętym przestrzeni metrycznej X i $f: A \rightarrow I^n$ jest odwzorowaniem ciągłym, to istnieje odwzorowanie ciągłe $g: X \rightarrow I^n$ takie, że $g|A = f$.*

Dowód. Na odwzorowanie $f: A \rightarrow I^n$ składają się odwzorowania ciągłe $f_1: A \rightarrow I, \dots, f_n: A \rightarrow I$ (inaczej mówiąc, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ dla $x \in A$). Każde z odwzorowań f_i ma, na mocy twierdzenia Tietzego, przedłużenie $g_i: X \rightarrow I$. Odwzorowania g_i składają się razem na zapowiedziane odwzorowanie ciągłe $g: X \rightarrow I^n$.

Twierdzenia Tietzego nie przenosi się na odwzorowania w sfery. Jest to zrozumiałe dla odwzorowań w sferę S^0 , tj. w przestrzeń dyskretną dwupunktową $\{-1, 1\}$; odwzorowanie na S^0 (przestrzeń niespójna) nie może mieć przedłużenia na przestrzeń X , jeśli ta przestrzeń X jest spójna. Nieprzenoszenie się twierdzenia Tietzego na odwzorowania w S^n , jeśli $n \geq 1$, ilustruje przykład

odwzorowania tożsamościowego sfery S^n , które nie może mieć przedłużenia na wnętrze kuli Q^{n+1} , bo to przedłużenie byłoby retrakcją Q^{n+1} na S^n ; twierdzenia o nieistnieniu retrakcji kuli na sferę dowodzimy w wykładzie 3 (s. 80).

Mimo to jest prawdą, że:

Twierdzenie. *Jeśli A jest podzbiorem domkniętym przestrzeni metrycznej X i $f: A \rightarrow S^n$ jest odwzorowaniem ciągłym, to istnieje zbiór otwarty U zawierający A i odwzorowanie ciągle $g: U \rightarrow S^n$ takie, że $g|_A = f$.*

Dowód. Traktujmy odwzorowanie f jako odwzorowanie w Q^{n+1} . Na mocy poprzedniego twierdzenia (które jest stosowne, bo kule Q^r są homeomorficzne z kostkami I^r) istnieje odwzorowanie ciągle $g': X \rightarrow Q^{n+1}$ takie, że $g'|_A = f$. Po usunięciu z kuli Q^{n+1} jej środka 0 powstaje zbiór otwarty $Q^{n+1} - \{0\}$, który ma retrakcję na S^n , na przykład daną wzorem $r(x) = x/|x|$. Zbiór $U = \{x \in X: g'(x) \in Q^{n+1} - \{0\}\}$ jest otwarty w X , zawiera zbiór A , a odwzorowanie $g = r \circ (g'|_U)$ jest zapowiadzanym przedłużeniem odwzorowania f .

Jest pewien sposób widzenia dowiedzionych twierdzeń, mający związek z teorią retraktów Borsuka⁽⁵⁾.

Ekstensorem absolutnym, AE , nazywa się każdą przestrzeń Y taką, że dla każdej przestrzeni X i dowolnego jej podzbioru domkniętego A oraz dowolnego odwzorowania ciągłego $f: A \rightarrow Y$ istnieje przedłużenie ciągle odwzorowania f na całe X ; jeśli przedłużenie jest możliwe jedynie na pewne otoczenie zbioru A , to przestrzeń Y jest *ekstensorem absolutnym otoczeniowym* ANE (zarówno ten skrót, jak i poprzedni wywodzi się z terminologii języka angielskiego: *absolute neighbourhood extensor*).

Oczywiście,

$$AE \subset ANE$$

co do zakresu.

Pojęcia AE i ANE nabierają sensu wszakże dopiero wtedy, kiedy ustali się zakres rozważanych przestrzeni X . Jeśli się tego nie robi, pojawi się trudność natury logicznej⁽⁶⁾. Dla nas jest to zakres przestrzeni metrycznych zwartych. *Teoria kategorii* jest dyscypliną matematyczną, w której pojęcia AE i ANE uzyskują właściwe ujęcie⁽⁷⁾.

⁽⁵⁾ K. Borsuk, *Theory of retracts*, Monografie Matematyczne 44, Warszawa 1967.

⁽⁶⁾ Chodzi o *trudność Russella* pojawiającą się zawsze, gdy na początku nie został określony zakres rozważanych zbiorów. Jest to trudność pozorna, bo zdanie „dla każdego zbioru X prawdą jest zdanie $\alpha(X)$ ”, nie ma żadnego znaczenia matematycznego, mimo że tego rodzaju zdania są przedmiotem badań logiki formalnej, dyscypliny badającej zdania bez względu na ich znaczenie. Podobnie nie ma znaczenia zdanie zaczynające się od „istnieje” (tzw. twierdzenia o istnieniu), jeśli nie doda się: „wśród”.

⁽⁷⁾ Skrypt autora *Wykłady z topologii, cz. I. Wstęp z teorii kategorii*, Katowice 1972, jest wystarczający dla tych celów.

Twierdzenie Tietzego orzeka, że odcinek prostej rzeczywistej jest AE , a dalsze twierdzenia, że kostki euklidesowe dowolnych wymiarów są również AE . Natomiast sfery są jedynie ANE .

Podzbiór A przestrzeni X nazywa się *retraktem przestrzeni X* , jeśli istnieje *retrakcja* przestrzeni X na A , czyli odwzorowanie ciągle $r: X \rightarrow A$ będące na A tożsamością, a więc takie, że

$$r(x) = x \text{ dla } x \in A.$$

Inne równoważne sformułowanie: A jest *retraktem przestrzeni X* , jeśli odwzorowanie tożsamościowe $A \rightarrow A$ ma przedłużenie ciągle $X \rightarrow A$.

Retrakt przestrzeni metrycznej (wystarczy założyć warunek T_2 Hausdorffa) jest zawsze jej podzbiorem domkniętym.

Przestrzeń Y jest nazywana *retraktem absolutnym AR* , jeśli po zanurzeniu jej jako podzbiór domknięty w jakąkolwiek przestrzeń (metryczną) X jest retraktem tej przestrzeni. Jeśli obraz przestrzeni Y przy tego rodzaju zanurzeniach jest retraktem pewnego swego otoczenia, to przestrzeń Y jest nazywana *retraktem absolutnym otoczeniowym ANR* (z ang. *absolute neighbourhood retract*).

Warunek określający retrakty absolutne jest zawężeniem warunku określającego ekstensory absolutne do wymagania, by odwzorowanie tożsamościowe $Y \rightarrow Y$ miało przedłużenie ciągle na całe X , o ile Y jest zanurzone jako podzbiór domknięty w X . Jest więc

$$AE \subset AR$$

co do zakresu i z tych samych powodów,

$$ANE \subset ANR.$$

Odcinek i kostki euklidesowe są więc AR -ami, a sfery ANR -ami.

W istocie, pojęcia retraktów absolutnych i ekstensorów absolutnych nie różnią się od siebie w zakresie, który nas tu interesuje, czyli w zakresie przestrzeni metrycznych zwartych.

Dla dowodu, trzeba wiedzieć, że każda przestrzeń metryczna zwarta ma zanurzenie w kostkę Hilberta, która jest AE (twierdzenie o zanurzeniu w kostkę Hilberta, patrz s. 73; dowód, że kostka Hilberta jest AE , zaczyna się tak, jak dowód tej własności dla I^n).

Wtedy dowód wygląda jak następuje.

Niech A będzie podzbiorem domkniętym przestrzeni metrycznej zwartej X . Niech przestrzeń metryczna zwarta Y będzie AR -em. Niech $f: A \rightarrow Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Na mocy pierwszego ze wspomnianych wyżej twierdzeń przestrzeń Y można uważać za podprzestrzeń kostki Hilberta Q , a odwzorowanie f za odwzorowanie w Q . Ponieważ Q jest AE (drugie ze

wspomnianych twierdzeń), więc to odwzorowanie w Q można przedłużyć z A na całe X . Niech $g: X \rightarrow Q$ będzie tym przedłużeniem. Jako AE kostka Hilberta jest AR -em. Istnieje więc retrakcja $r: Q \rightarrow Y$. Złożenie $r \circ g: X \rightarrow Y$ stanowi przedłużenie odwzorowania f .

Dowiedliśmy w ten sposób, że Y jest AE .

Podobnie dowodzi się, że zakresy ANR i ANE się pokrywają.

Twierdzenie o zmniejszaniu zbiorów w pokryciach. *Jeśli zbiory otwarte U_0, \dots, U_n pokrywają przestrzeń metryczną X , to istnieją zbiory otwarte V_0, \dots, V_n , również pokrywające przestrzeń X , takie, że*

$$V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i$$

dla każdego i .

D o w ó d. Zapowiedzianego zmniejszania zbiorów U_i dokonuje się kolejno przez indukcję. Dla zbioru otwartego U_0 i zbioru $X - (U_1 \cup \dots \cup U_n)$, domkniętego, mamy

$$X - (U_1 \cup \dots \cup U_n) \subset U_0.$$

Na mocy wniosku z lematu Urysohna istnieje zbiór otwarty V_0 taki, że

$$X - (U_1 \cup \dots \cup U_n) \subset V_0 \subset \bar{V}_0 \subset U_0.$$

Zbiory V_0, U_1, \dots, U_n są otwarte i nadal pokrywają przestrzeń. Tym samym co poprzednio sposobem zmniejszamy teraz zbiór U_1 (nie zmniejszając pozostałych, w szczególności zbioru V_0), a potem następne.

Patrząc na dowód, widzimy, że dla prawdziwości twierdzenia wystarczyłoby założyć normalność przestrzeni.

Twierdzenie ma formę dwoistą: jeśli podzbiory domknięte A_0, \dots, A_n przestrzeni metrycznej (wystarczy normalność) nie mają punktu wspólnego, a więc jeśli

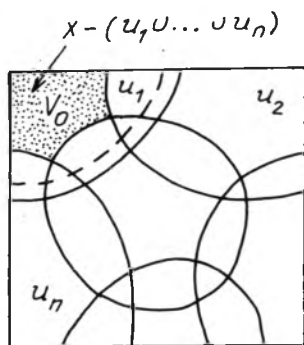
$$A_0 \cap \dots \cap A_n = \emptyset,$$

to istnieją zbiory domknięte B_0, \dots, B_n takie, że

$$A_i \subset \text{int } B_i \subset B_i \text{ dla wszystkich } i,$$

dla których

$$B_0 \cap \dots \cap B_n = \emptyset.$$



Rys. 52. Zmniejszanie zbioru U_0

Przejścia do tej wersji dokonuje się przez prawa de Morgana.

Następujące twierdzenie — nazywane lematem — chociaż nie mające powiązania z poprzednimi, będzie stosowane w dowodach tych samych twierdzeń.

Lemat Lebesgue'a. *Dla każdego pokrycia przestrzeni metrycznej zwartej zbiorami otwartymi istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli podzbiór przestrzeni ma średnicę $\leq \delta$, to jest zawarty w pewnym elemencie pokrycia.*

Liczba δ spełniająca dla danego pokrycia warunki tego twierdzenia bywa nazywana *liczbą Lebesgue'a* tego pokrycia. Nazwa jest tradycyjna, chociaż nie jest zupełnie logiczna, ponieważ liczba δ nie jest dla danego pokrycia wyznaczona jednoznacznie (każda mniejsza też jest liczbą Lebesgue'a). Jej rola dla pokrycia jest taka sama, jak rola liczby δ dobieranej do danego $\varepsilon > 0$ na mocy ciągłości funkcji.

D o w ó d. Niech P będzie pokryciem przestrzeni zwartej metrycznej zbiorami otwartymi. Przypuśćmy, że zapowiadanej liczby δ nie ma. Wynikałoby stąd, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje zbiór Z_n o średnicy $\leq 1/n$ nie mieszczący się w żadnym elemencie pokrycia P . Wobec zwartości możemy przyjąć, że istnieje ciąg $a_n, a_n \in Z_n$ zbieżny. Niech $a = \lim a_n$. Niech U będzie elementem pokrycia P takim, że $a \in U$. Istnieje $r > 0$ takie, że kula $K(a, r)$ (o środku w a i o promieniu r) mieści się w U . Niech n_* będzie tak duże, by dla $n \geq n_*$ punkty a_n należały do $K(a, r/2)$ i by średnica zbiorów Z_n nie przekraczała $r/2$. Mielibyśmy wtedy $Z_n \subset U$ dla wspomnianych n , wbrew założeniu.

Odnotujemy następujący szczególny przypadek lematu Lebesgue'a: *jeśli A jest zbiorem otwartym, a U zbiorem otwartym w przestrzeni zwartej metrycznej takim, że $A \subset U$, to istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli zbiór ma średnicę $\leq \delta$ i przecina A , to jest zawarty w U .*

Istnieje forma dwoista lematu Lebesgue'a: *Jeśli podzbiory domknięte przestrzeni metrycznej zwartej nie mają punktu wspólnego, to istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że jeśli podzbiór przestrzeni ma średnicę $\leq \delta$, to nie przecina któregoś ze wspomnianych zbiorów domkniętych.*

Jest wiele zastosowań lematu Lebesgue'a poza tymi, które pojawiają się w ciągu niniejszych wykładów. Oto dowód jednostajnej ciągłości odwzorowania przestrzeni metrycznej zwartej X w przestrzeń metryczną, ciągłego w każdym punkcie przestrzeni X .

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla każdego punktu x przestrzeni X istnieją otoczenia U punktu x takie, że jeśli $u \in U$, to $d(f(x), f(u)) \leq \varepsilon$. Te otoczenia U pokrywają przestrzeń X . Weźmy $\delta > 0$, jedną z liczb Lebesgue'a tego pokrycia. Jeśli $d(x', x'') \leq \delta$, to x' i x'' leżą w jednym elemencie U pokrycia. Niech x będzie tym punktem przestrzeni X , dla którego to U jest otoczeniem spełniającym dla danego ε wspomniany na początku warunek. Mamy

$$d(f(x'), f(x'')) \leq d(f(x'), f(x)) + d(f(x), f(x'')) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Kostka Hilberta. Rozważmy zbiór ciągów $\{x_1, x_2, \dots\}$ liczb rzeczywistych x_j takich, że

$$(3) \quad 0 \leq x_j \leq 1/j,$$

w którym przez odległość ciągów $x = \{x_1, x_2, \dots\}$ i $y = \{y_1, y_2, \dots\}$ rozumie się liczbę

$$d(x, y) = \sup\{|x_j - y_j| : j = 1, 2, \dots\}.$$

Oczywiście, $d(x, y) \geq 0$, a $d(x, y) = 0$ pociąga $x = y$. W celu sprawdzenia warunku trójkąta wyjdźmy z nierówności

$$|x_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |y_j - z_j|,$$

prawdziwej dla każdego j i każdej ustalonej dla danego j liczby rzeczywistej z_j . Ta nierówność pozostaje prawdziwa po przemnożeniu stron przez $1/j$. Po zastąpieniu prawej strony przez kres górny po $j = 1, 2, \dots$ dostajemy

$$|x_j - z_j| \leq d(x, y) + d(y, z)$$

dla każdego j , gdzie $z = \{z_1, z_2, \dots\}$. Nierówność zachowa się po przejściu do kresu górnego po lewej stronie. Dostajemy

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

dla dowolnych trzech ciągów x, y i z .

Określiliśmy *kostkę Hilberta*.

Kostka Hilberta jest bezpośrednim uogólnieniem kostek euklidesowych (z metryką daną przez maksimum modułów różnic współrzędnych). Podobnie jak kostki euklidesowe, *kostka Hilberta jest przestrzenią zwartą*.

Dowód. Rozważmy ciąg q_1, q_2, \dots punktów kostki Hilberta. Punkty q_j są ciągami liczb rzeczywistych ograniczonymi. Wybierzmy z ciągu q_1 podciąg zbieżny; niech N_1 będzie zbiorem wskaźników tego podciągu. Z ciągu q_2 , ograniczonego do wyrazów ze wskaźnikami w N_1 , wybierzmy podciąg zbieżny; niech N_2 będzie zbiorem wskaźników tego podciągu. Jest $N_1 \supset N_2$. Postępując tak dalej, przez indukcję, zbudujemy ciąg zbiorów nieskończonych $N_1 \supset N_2 \dots$ liczb naturalnych taki, że dla każdego j ciąg $q_j|_{N_j}$ jest zbieżny.

W zbiorze N_1 wybierzmy dowolnie liczbę n_1 , a później, w zbiorze N_2 , liczbę n_2 taką, że $n_1 < n_2$, dalej liczbę n_3 w zbiorze N_3 taką, że $n_2 < n_3$ itd. W ten sposób budujemy ciąg

liczb naturalnych taki, że dla każdego j ciąg q_j ograniczony do wskaźników ciągu (4) jest zbieżny; dzieje się tak dlatego, że wyrazy ciągu (4), począwszy od wyrazu j -tego, należą do N_j .

Pokażemy, że ciąg $\{q_{n_1}, q_{n_2}, \dots\}$ jest zbieżny, a dokładniej, pokażemy, że jest zbieżny do punktu $x = \{x_1, x_2, \dots\}$, gdzie x_j jest granicą ciągu $q_j|N_j$. Będzie wtedy $0 \leq x_j \leq 1/j$; punkt x jest więc punktem kostki Hilberta.

Pokażemy, że $d(q_{n_j}, x) \rightarrow 0$, jeśli $j \rightarrow \infty$.

Mamy bowiem $d(q_{n_j}, x) = \sup\{|q_{n_j k} - x_k| : k = 1, 2, \dots\}$, gdzie przez $q_{n_j k}$ został oznaczony k -ty wyraz ciągu q_{n_j} . Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ustalmy k_* tak, by $1/k < \varepsilon$, jeśli $k > k_*$. Dla spełnienia nierówności

$$d(q_{n_j}, x) \leq \varepsilon$$

wystarczy, wobec (3), by spełnione były nierówności

$$|q_{n_j 1} - x_1| \leq \varepsilon, \dots, |q_{n_j k} - x_k| \leq \varepsilon.$$

Ten układ nierówności jest spełniony dla dostatecznie dużych j , bo dla każdego k z osobna jest

$$|q_{n_j k} - x_k| \rightarrow 0, \text{ jeśli } j \rightarrow \infty.$$

Zwróćmy uwagę na paradoksalną przesłankę mnogościową umożliwiającą dowód, według której, jeśli $N_1 \supset N_2 \supset \dots$ jest ciągiem podzbiorów nieskończonych zbioru N liczb naturalnych, to istnieje podzbiór nieskończony N' zbioru N (w dowodzie był to zbiór $\{n_1, n_2, \dots\}$) taki, że różnice $N' - N_j$ są dla każdego j skończone. Zbiór N' jest *prawie zawarty* w każdym ze zbiorów N_j , tj. zawarty w N_j , jeśli pominąć pewną skończoną (zależną od j) ilość elementów zbioru N' . Przesłanka pozostanie w mocy, jeśli założy się jedynie to, że N_{j+1} jest prawie zawarte w N_j dla każdego j . Na wagę tej przesłanki zwrócił uwagę Sierpiński (1945)⁽⁸⁾.

* * *

Niech X będzie przestrzenią metryczną ośrodkową; założymy — co z punktu widzenia topologii nie ma znaczenia — że średnica przestrzeni X jest skończona i że jest ≤ 1 . Niech $\{p_1, p_2, \dots\}$ będzie podzbiorem gęstym przestrzeni X .

⁽⁸⁾ W. Sierpiński, *Sur une suite transfinie d'ensembles de nombres naturels*, Fund. Math. 33 (1945), 9—11; w *Oeuvres choisies*, t. III, s. 422—424. W pracy z 1937 r. (Wiadomości Matematyczne 42, 1—3) Sierpiński zauważył, że zwartość kostki Hilberta można wyprowadzić ze zwartości kwadratu i istnienia odwzorowania ciągłego odcinka na kwadrat (odwzorowania Peany).

Punktowi x przestrzeni X przyporządkujemy punkt

$$f(x) = \{d(x, p_1), \dots, (1/k) \cdot d(x, p_k), \dots\}$$

kostki Hilberta.

Odwzorowanie f jest zanurzeniem.

Oczywiście, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Ciągłość f wynika stąd, że $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$, co wynika z nierówności $|d(x, p_j) - d(y, p_j)| \leq d(x, y)$.

Aby udowodnić, że f jest zanurzeniem, należy dowieść ciągłości odwzorowania odwrotnego. Sprowadza się ono do dowodu implikacji

$$(5) \quad f(x_j) \rightarrow f(x) \Rightarrow x_j \rightarrow x$$

dla dowolnie wziętego ciągu x_j punktów przestrzeni X .

Dla dowodu (5) ustalmy $\varepsilon > 0$. Odnotujmy, że

$$d(x_j, x) \leq d(x_j, p_k) + d(p_k, x) \text{ dla każdego } k.$$

Wobec gęstości zbioru p_1, p_2, \dots , dobierzmy punkt p_k tak, by $d(p_k, x) \leq \varepsilon$.
Mamy

$$d(x_j, x) \leq d(x_j, p_k) + \varepsilon$$

dla tak dobranego p_k . Ale $f(x_j) \rightarrow f(x)$, więc istnieje j_* takie, że $j \geq j_*$ pociąga $|d(x_j, p_k) - d(x, p_k)| \leq \varepsilon$.

Zatem

$$d(x_j, x) \leq d(x, p_k) + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon,$$

jeśli $j \geq j_*$.

Dowiedliśmy w ten sposób, że każda przestrzeń metryczna ośrodkowa ma zanurzenie w kostkę Hilberta, co znaczy, że jest homeomorficzna z pewną podprzestrzenią kostki Hilberta.

WYKŁAD 3. Twierdzenie o nieistnieniu retrakcji sympleksu na jego brzeg • Lemat Spernera • Przestrzenie euklidesowe różniące się wymiarami nie są homeomorficzne • Twierdzenie o zamocowaniu • Twierdzenie o zachowaniu otwartości • Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym • Twierdzenie Bohla • Twierdzenie Kuratowskiego-Steinhaus'a • O przestrzeniach mających własność punktu stałego

Niech $\Delta^n = \Delta(a_0, \dots, a_n)$ będzie sympleksem n -wymiarowym. Przez jego brzeg — oznaczany symbolem $\partial\Delta^n$ — rozumiemy sumę wszystkich jego ścian $(n-1)$ -wymiarowych, tj. zbiór złożony z tych punktów sympleksu Δ^n , dla których $\lambda_j(x) = 0$ dla co najmniej jednego j .

Przypomnijmy, że sympleks Δ^n jest położony w hiperpłaszczyźnie $\lambda_0(x) + \dots + \lambda_n(x) = 1$, która w tym wykładzie reprezentuje przestrzeń euklidesową E^n .

Twierdzenie 1. *Jeśli odwzorowanie ciągle sympleksu Δ^n w E^n nie wyprowadza punktów ze ścian, w których leżą, to jego obraz pokrywa sympleks Δ^n . Inaczej: jeśli dla odwzorowania ciągłego $f: \Delta^n \rightarrow E^n$ jest zawsze*

$$(1) \quad \lambda_j(f(x)) = 0, \quad \text{jeśli} \quad \lambda_j(x) = 0,$$

to $f(\Delta^n) \supset \Delta^n$.

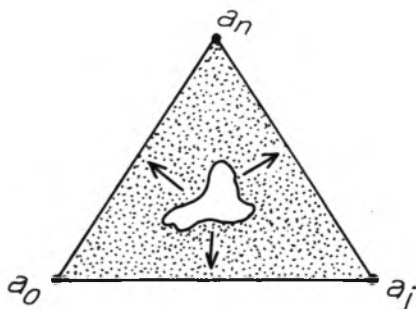
W szczególności, warunek (1) jest spełniony, jeśli f jest tożsamością na brzegu, a więc jeśli $f(x) = x$ dla $x \in \partial\Delta^n$. Z twierdzenia 1 wynika, że odwzorowanie ciągle sympleksu w siebie, będące tożsamością na brzegu, jest odwzorowaniem „na”; w szczególności, obrazem nie może być brzeg sympleksu, a więc⁽¹⁾:

⁽¹⁾ Twierdzenie o nieistnieniu retrakcji kuli euklidesowej na jej brzeg było znane już Bohlowi (1904); P. Bohle, *Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichts-*

Twierdzenie 1'. Niemożliwa jest retrakcja sympleksu na jego brzeg.

Przypomnijmy, że przez *retrakcję* przestrzeni X na jej podzbiór A rozumiemy odwzorowanie ciągle przestrzeni X na A będące tożsamością na A .

Rys. 53. Twierdzenie 1' wygląda na oczywiste: retrahując sympleks na brzeg, musielibyśmy ten sympleks rozedrzeć gdzieś w środku. Ale jedynie w wymiarze 1, tj. dla odcinka prostej, dowód jest natychmiastowy: odcinek nie może być w sposób ciągły odwzorowany na swój niespójny brzeg



Na twierdzenie 1 można patrzeć również jak na przeniesione na wyższe wymiary twierdzenie Bolzany⁽²⁾ o przyjmowaniu przez funkcję ciągłą, określoną na przedziale prostej, wszystkich wartości między każdą z dwóch wartości już przyjętych; chociaż nie jest to przeniesienie pełne. W twierdzeniu 1 wypowiedzianym dla wymiaru $n = 1$ wymagamy, by $f(a_0) = a_0$ i $f(a_1) = a_1$.

Twierdzenie Bolzany nie ma tych restrykcji. Zobaczymy wszakże (jeszcze w tym wykładzie), że restrykcje z twierdzenia 1 dają się rozluźnić.

lage, Journal für die reine und angewandte Mathematik 127 (1904), 179—276; por. także *Sobranije trudow* Bohla, Ryga 1974, na s. 199—289, z komentarzami (23)—(25) do s. 205 i 214; Bohl wykorzystywał w dowodzie pewne założenia różniczkowe o odwzorowaniach. Znane było ono w jakiś sposób — w pełnym już zakresie odwzorowań ciągłych — Brouwerowi; L. E. J. Brouwer, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, 71 (1912), 97—115; w *Collected Works*, t. II, na s. 454—474. Miało znaną nam formę: odwzorowanie ciągle kuli w siebie, będące tożsamością na brzegu, jest odwzorowaniem „na”. Później Borsuk (1931) (K. Borsuk, *Sur les retractions*, Fundamenta Mathematicae 17 (1931), 152—170; 20 *Lemme* na s. 161, *Collected Papers*, t. 1, s. 2—20) nadał twierdzeniu większą ogólność (por. twierdzenie na s. 134 tego wykładu), a dzięki pojęciu retraktu, które wprowadził, nadał twierdzeniu osobne znaczenie.

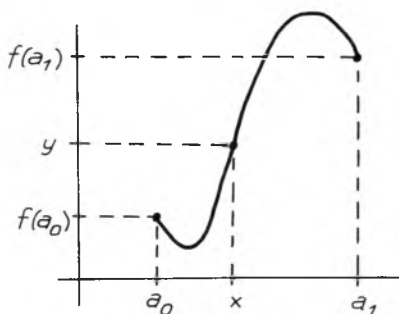
⁽²⁾ Bernard Bolzano, *Rein analytischer Beweis, dass zwischen zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liegt*, Praga 1817.

Bolzano jako pierwszy zwrócił uwagę na potrzebę ścisłego dowodu tego twierdzenia i taki ścisły dowód przeprowadził. Dowód wymagał sprecyzowania pojęcia ciągłości funkcji, co właśnie po raz pierwszy przy okazji tego dowodu było zrobione, oraz wyodrębnienia tej właściwości zbioru liczb rzeczywistych, którą za Dedekindem nazywamy *ciągłością*. Twierdzenie Bolzany wyjaśniało między innymi istnienie miejsc zerowych wielomianów rzeczywistych stopnia nieparzystego.

Twierdzenie było znane również Cauchy'emu, *Cours d'analyse*, 1821.

Gauss z kolei jako pierwszy w ścisły sposób podszedł do problemu miejsc zerowych wielomianów zespolonych, tj. do problemu tego, co poprzednio, ale już w wymiarze 2. Analiza dowodów tzw. zasadniczego twierdzenia algebry (jak się je nazywa) prowadzi w prostej linii do potrzeby rozwinięcia metod topologicznych — są one przedmiotem tych wykładów — oddających istotę metod Gaussa. Topologia ma kilka niezależnych źródeł, ale to, które wywodzi się z dowodów Gaussa zasadniczego twierdzenia algebry, wydaje się najważniejsze.

Twierdzenie Bolzany wypełniało jedną z luk dowodów Gaussa.



Rys. 54. Twierdzenie Bolzano

Odnajdujemy, jako bezpośredni wniosek z twierdzenia 1, mające silniejsze niż twierdzenie 1' brzmienie, następujące

Twierdzenie 1". *Nieemożliwe jest odwzorowanie ciągle sympleksu Δ^n w $\partial\Delta^n$ i spełniające przy tym warunek (1), tj. nie wyprowadzające punktów ze ścian, w których leżą.*

Wynika zeń w prosty sposób twierdzenie 1.

Jeśli bowiem odwzorowanie ciągle $f: \Delta^n \rightarrow E^n$ spełnia warunek (1), to odwzorowanie $r \circ f: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$, gdzie $r: E^n \rightarrow \Delta$ jest jakąkolwiek retrakcją, również spełnia ten warunek. Niech r będzie przy tym retrakcją przeprowadzającą punkty spoza Δ^n na punkty z $\partial\Delta^n$.

Jeśli teraz $f(\Delta^n)$ nie pokrywa całości sympleksu Δ^n , to samo jest prawdą dla odwzorowania $r \circ f$. Niech p będzie punktem sympleksu Δ^n nie należącym do $r(f(\Delta^n))$. Biorąc jakąkolwiek retrakcję $\Delta^n - \{p\}$ na $\partial\Delta^n$, nakładając ją na $r \circ f$, dostaniemy odwzorowanie ciągle $\Delta^n \rightarrow \partial\Delta^n$, spełniające warunek (1), co przeczy twierdzeniu 1".

Dlatego wystarczy dowodzić twierdzenia 1".

Dowód twierdzenia 1". Przypuśćmy, że mamy odwzorowanie ciągle $f: \Delta^n \rightarrow \partial\Delta^n$ spełniające warunek (1).

Zbiory $f^{-1}(g_{\partial\Delta^n} a_i)$ są otwarte i wszystkie razem pokrywają sympleks Δ^n . Jest

$$(2) \quad f^{-1}(g_{\partial\Delta^n} a_i) \subset (g_{\Delta^n} a_i),$$

co wynika z (1).

Niech K będzie iteracją podziału barycentrycznego sympleksu Δ^n na tyle drobną, by dla każdego wierzchołka b triangulacji K było

$$(3) \quad g_{w|K|} b \subset f^{-1}(g_{\partial\Delta^n} a_i)$$

dla pewnego i .

Dla każdego wierzchołka b triangulacji K wybierzmy jedno i spełniające (3); oznaczmy je przez $\varphi(b)$. Mamy

$$(4) \quad g_{w|K|} b \subset f^{-1}(g_{\partial\Delta^n} a_{\varphi(b)}).$$

Przyporządkowanie $b \rightarrow \varphi(b)$ ma własność:

$$76 \quad (5) \quad \text{jeśli } \lambda_j(b) = 0, \quad \text{to } \varphi(b) \neq j.$$

Istotnie, jeśli $\lambda_j(b) = 0$, to $gw_{|K|}b \notin gw_{\partial\Delta^n}a_i$, skąd, wobec (2), $gw_{|K|}b \notin f^{-1}(gw_{\partial\Delta^n}a_i)$, co znaczy $\varphi(b) \neq j$, na mocy (4).

Streszczając to mniej formalnie: wierzchołki triangulacji K zostały ponumerowane za pomocą odwzorowania φ liczbami $0, \dots, n$ tak, że wierzchołkowi leżącemu na ścianie wyznaczonej przez a_{i_0}, \dots, a_{i_k} jest przyporządkowana jedna z liczb i_0, \dots, i_k , tj. jeden z numerów wierzchołków wyznaczających tę ścianę.

Zauważmy, że •

(6) jeśli zbiór S jest zbiorem wierzchołków pewnego sympleksu triangulacji K , to zbiór $\{a_{\varphi(b)} : b \in S\}$ jest zbiorem wierzchołków pewnego sympleksu triangulacji $\partial\Delta^n$ (tej, która składa się ze ścian sympleksu Δ^n).

$$\begin{aligned} \text{Istotnie, } f^{-1}(\cap \{(gw_{\partial\Delta^n}a_{\varphi(b)} : b \in S)\}) &= \cap \{f^{-1}gw_{\partial\Delta^n}a_{\varphi(b)} : b \in S\} \supset \cap \\ &\supset \cap \{gw_{|K|}b : b \in S\} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Nierówność wynika z tego, że zbiór S jest zbiorem wierzchołków pewnego sympleksu. Wnioskujemy z niej, że przekrój gwiazd wierzchołków $a_{\varphi(b)}$ triangulacji $\partial\Delta^n$, gdzie b przebiega zbiór S , jest niepusty, co znaczy, że sympleks o wierzchołkach $\varphi(b)$, $b \in S$, należy do triangulacji $\partial\Delta^n$.

Jeśliby teraz w triangulacji K znalazł się sympleks, na którego wierzchołkach numeracja φ przyjmowałaby wszystkie wartości $0, \dots, n$, to na mocy (6) sympleks $\Delta(a_0, \dots, a_n)$ byłby sympleksem triangulacji $\partial\Delta^n$, co nie jest prawdą.

Dowód będzie więc zakończony sprzecznością, jeśli wykazemy, że tego rodzaju sympleks w triangulacji K się pojawi.

Lemat Spernera (1928)⁽³⁾. Jeśli odwzorowanie φ przyporządkowuje wierzchołkom b pewnej iteracji podziału barycentrycznego sympleksu $\Delta(a_0, \dots, a_n)$ liczby ze zbioru $\{0, \dots, n\}$ tak, że spełniony jest warunek (5), to wśród sympleksów tego podziału istnieje taki, na którego wierzchołkach odwzorowanie φ przyjmuje wszystkie wartości $0, \dots, n$. Więcej: ilość tego rodzaju sympleksów — nazwijmy je sympleksami z pełną numeracją — jest nieparzysta.

D o w ó d. Twierdzenie jest prawdziwe w oczywisty sposób dla sympleksu wymiaru 0 (jednopunktowego; nietrudno dowodzi się go również w wymiarze 1, tj. dla podziału odcinka).

Założmy, że jest prawdziwe dla sympleksu wymiaru $m - 1$.

Niech $\Delta^m = \Delta(a_0, \dots, a_{m-1}, a_m)$ będzie sympleksem wymiaru m . Niech K będzie pewną iteracją podziału barycentrycznego sympleksu Δ^m . Niech

⁽³⁾ E. Sperner, *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebiets*, Abhandlungen d. Mathematischen Seminar, Hamburg Universität 6 (1928), 265—272. U Spernera był to lemat do twierdzenia „o zamocowaniu”, które tu dowodzimy na s. 176, stanowiącego istotę wcześniejszego twierdzenia Lebesgue'a o pokryciach sympleksu znanego także jako „Pflastersatz”; tu w wykładzie o wymiarze.

$\varphi : K^0 \rightarrow \{0, \dots, m\}$ będzie odwzorowaniem spełniającym warunek (5) (przez K^0 oznaczyliśmy jak zwykle zbiór wierzchołków triangulacji K). Oznaczmy przez s liczbę sympleksów triangulacji K mających pełną numerację $\{0, \dots, m\}$.

Niech R będzie rodziną sympleksów $(m-1)$ -wymiarowych triangulacji K , mających pełną numerację $\{0, \dots, m-1\}$. Liczba r sympleksów rodziny R leżących na ścianie $\Delta(a_0, \dots, a_{m-1})$ jest nieparzysta, na mocy założenia indukcyjnego.

Trzeba dowieść, że $s \equiv r \pmod{2}$.

Dla każdego sympleksu n -wymiarowego d triangulacji K oznaczmy przez $p(d)$ ilość ścian $(m-1)$ -wymiarowych sympleksów triangulacji K mających pełną numerację $\{0, \dots, m-1\}$. Jest

$$(7) \quad \sum_d p(d) \equiv s \pmod{2},$$

bo na sympleksie d z pełną numeracją $\{0, \dots, m\}$ jest jedna tego rodzaju ściana, a na innych sympleksach d nie ma żadnej albo są dwie.

W wyrażeniu $\sum_d p(d)$ ściany $(m-1)$ -wymiarowe nie leżące na $\partial \Delta^m$ są liczone dwa razy, bo każda jest wspólną ścianą dwu sympleksów m -wymiarowych triangulacji K (por. uwaga o iteracjach podziałów barycentrycznych w poprzednim wykładzie, s. 49). Na $\partial \Delta^m$ ściany $m-1$ -wymiarowe z pełną numeracją $0, \dots, m-1$ mogą leżeć jedynie na ścianie $\{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ i są liczone tylko raz (por. wspomniana już uwaga). Stąd,

$$(8) \quad \sum_d p(d) \equiv r \pmod{2}.$$

Z wzorów (7) i (8) oraz z nieparzystości liczby r wnosimy o nieparzystości liczby s .

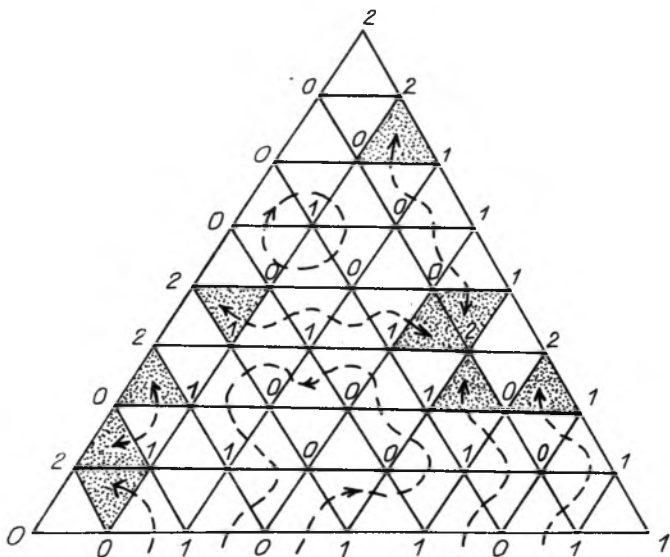
W ten sposób dowód indukcyjny się kończy.

W przeprowadzonym dowodzie lemat Spernera jest naturalną przesłanką. Z samą numeracją, jaka się w nim pojawiła — będziemy ją nazywać *numeracją Spernera* — można się spotkać wszakże w zupełnie prostych sytuacjach.

Niech K będzie jakimkolwiek podziałem sympleksu Δ^n . Rozważmy aproksymację sympleksu Δ^n tożsamości na Δ^n dla triangulacji K i triangulacji podstawowej sympleksu Δ^n złożonej ze wszystkich ścian tego sympleksu. Polega ona na przyporządkowaniu wierzchołkom b triangulacji K jednego z wierzchołków $a_{\varphi(b)}$ sympleksu Δ^n tak, by

$$g_{w|K}|b \subset g_{w|\Delta^n} a_{\varphi(b)}$$

Przyporządkowanie $b \rightarrow \varphi(b)$ jest numeracją Spernera, co widać.

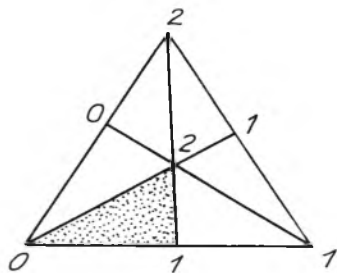


Rys. 55. Lemat Spernera: rysunek mówiący więcej niż dowód (triangulacja nie jest iteracją podziału barycentrycznego, mimo to lemat Spernera na niej się sprawdza). Przechodzimy do następnego sympleksu przez ścianę 01

Szczególnie prosto przedstawia się numeracja Spernera w przypadku pierwszego podziału barycentrycznego: ma ona jeden sympleks o pełnej numeracji (dowód: przez indukcję ze względu na wymiar sympleksu).

Twierdzenie 1, którego ideę można znaleźć już u Bohla (1904), a faktycznie zawiera ją praca Brouwera (1911), jest najważniejszym twierdzeniem tego wykładu. Inne dostaniemy, korzystając z niego za pomocą ogólnych środków topologii mnogościowej i geometrii analitycznej.

Głównym punktem dowodu był lemat kombinatoryczny Spernera. Idea sprowadzania zagadnień ciągłościowych do kombinatoryki pochodzi od Brouwera, ale nie była jeszcze przez niego ześrodkowana w jednej przesłance.

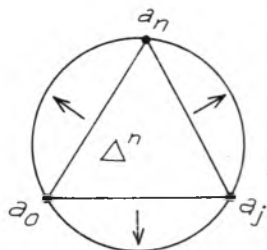


Rys. 56. Numeracja Spernera dla podziału barycentrycznego

* * *

Kulę euklidesową n -wymiarową $Q^n = \{x \in E^n : |x| \leq 1\}$ można odwzorować homeomorficznie na sympleks Δ^n tak, by brzeg $S^{n-1} = \{x \in E^n : |x| = 1\}$ kuli przeszedł na brzeg $\partial \Delta^n$ sympleksu.

Dowód polega na zapisaniu wzorem odwzorowania, na przykład takiego, dla którego wskazówką jest rysunek niżej; wygodniej jest tu wyobrazić sobie odwzorowanie $\Delta^n \xrightarrow{na} Q^n$ (odwrotne do wspomnianego).



Rys. 57. Przy tym homeomorfizmie (dalej pokażemy, że przy każdym) brzeg sympleksu przechodzi na brzeg kuli

Twierdzenie 1'''. *Niemożliwa jest retrakcja kuli Q^n na jej brzeg S^{n-1} .*

Dowód. Przypuśćmy, że $r: Q^n \rightarrow S^{n-1}$ jest retrakcją. Niech $h: \Delta^n \rightarrow Q^n$ będzie homeomorfizmem, jednym ze wspomnianych wyżej. Odwzorowanie $h^{-1} \circ r \circ h$ jest retrakcją Δ^n na $\partial \Delta^n$. Sprzeczność.

Nie ma żadnej istotnej różnicy między twierdzeniami 1' i 1'', chociaż mogą być powody, na przykład natury rachunkowej, dla których jedno może być wygodniejsze niż drugie.

Wypada jednak zwrócić uwagę na to, że przejście od twierdzenia 1' do twierdzenia 1''' nie było całkiem banalne: wymagało homeomorfizmu kuli i sympleksu będącego jednocześnie homeomorfizmem ich brzegów.

Kilka uwag o pojęciu brzegu.

W poprzednich twierdzeniach brzegi sympleksów i kul były rozumiane geometrycznie, czyli dane przez opis bądź to za pomocą współrzędnych barycentrycznych, bądź za pomocą długości wektora.

Jeżeli jednak sympleks lub kula leżą w przestrzeni topologicznej, to ich brzeg w tej przestrzeni można rozumieć zasadniczo inaczej niż poprzednio. Przypomnijmy, że przez brzeg zbioru położonego w przestrzeni topologicznej rozumie się przekrój domknięcia tego zbioru (samego zbioru, jeżeli zbiór jest domknięty) z domknięciem jego dopełnienia.

Brzegi kul Q^n i sympleksów Δ^n w ich naturalnych położeniach w E^n (dotąd rozpatrywanych) są brzegami tych brył również w znaczeniu geometrycznym, co można nietrudno sprawdzić.

Twierdzenie (Borsuk, 1931). *Niech A będzie podzbiorem zwartym przestrzeni E^n mającym wewnątrz niepuste. Niemożliwa jest retrakcja zbioru A na jego brzeg.*

Dowód. Przyjmijmy, co nie zmniejsza ogólności, że początek układu 0 należy do wnętrza zbioru A . Wobec zwartości, a w rezultacie ograniczoności, zbioru A , można przyjąć, że

$$A \subset Q^n = \{x \in E^n: |x| \leq 1\}.$$

Przypuśćmy, że r jest retrakcją zbioru A na jego brzeg. Jest wtedy $r(x) \neq 0$ dla wszystkich x ze zbioru A (bo 0 nie należy do brzegu zbioru A). Odwzorowanie r' określone wzorami:

$$r'(x) = \begin{cases} \frac{r(x)}{|r(x)|} & \text{dla } x \text{ ze zbioru } A, \\ \frac{x}{|x|} & \text{dla pozostałych } x, \end{cases}$$

jest ciągle (wzory zgadzają się na brzegu zbioru A) i, ograniczone do Q^n , jest retrakcją Q^n na S^{n-1} . Sprzeczność z twierdzeniem 1".

* * *

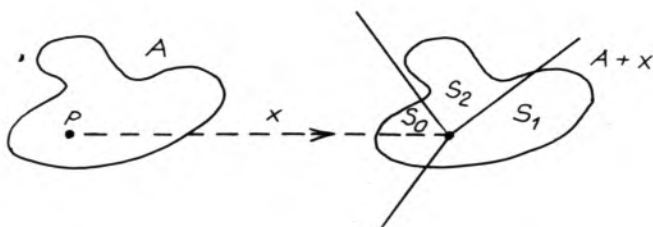
Aby zilustrować znaczenie twierdzenia 1, dowiedzimy dwu twierdzeń, które chociaż nie będą miały udziału w dalszej dedukcji, to jednak mogą być ciekawe same przez się.

Pierwsze przypomina (bardziej znane i znacznie trudniejsze) twierdzenie „o kanapce”⁽⁴⁾ i może być uważane za twierdzenie z teorii miary.

Twierdzenie Kuratowskiego-Steinhausa⁽⁵⁾ (1953). *Mając dany podział przestrzeni E^n na $n+1$ sektorów i podzbiór ograniczony przestrzeni E^n , mierzalny o mierze dodatniej, można tak przesunąć ten podzbiór, by jego przekroje z sektorami miały miary w danej z góry proporcji. Dokładniej: mając zbiór A taki jak wyżej i liczby nieujemne $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ takie, że $\alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1$, można przesunąć zbiór A o taki wektor x , że dla przekrojów zbioru $A+x$ z sektorami S_j będzie*

$$\alpha_j = \frac{\mu((A+x) \cap S_j)}{\mu(A)}.$$

Rysunek 58 ilustruje twierdzenie w wymiarze 2. Miara — oznaczona symbolem μ — jest rozumiana w sensie Lebesgue’a. Symbol $A+x$ oznacza zbiór A przesunięty o x .

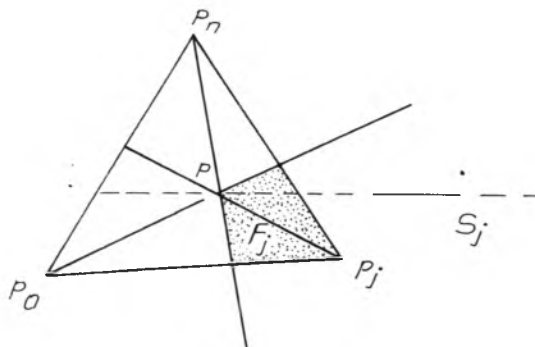


Rys. 58. Twierdzenie Kuratowskiego-Steinhausa

⁽⁴⁾ Trzy bryły dowolnie położone w przestrzeni można przepołowić co do objętości jednym cięciem płaskim — tu por. wykład 11, s. 220.

⁽⁵⁾ K. Kuratowski, H. Steinhaus, *Une application géométrique du théorème de Brouwer sur les points invariants*. Bull. de l'Académie Pol. Sci., Cl. III, 1 (1953), 83—86; w *Selected Papers H. Steinhaus*, Warszawa 1985, na s. 636—639. Inny dowód — oparty na twierdzeniu Borsuka-Ulama o antypodach, które dowodzimy w wykładzie 13 — podał Borsuk (ten sam tom Biuletynu PAN): K. Borsuk, *An application of the theorem on antipodes to the measure theory*, s. 87—90.

Niech podział na sektory S_j będzie zrealizowany (por. wykład 2, s. 53) przez sympleks $\Delta^n = \Delta(p_0, \dots, p_n)$ i punkt p we wnętrzu tego sympleksu. Sektor S_j składa się z wszystkich punktów półprostych wychodzących z p , których przedłużenia wstecz przechodzą przez punkty ściany naprzeciw p_j (por. rys. 59).



Rys. 59. Przekroje $F_j = S_j \cap \Delta(p_0, \dots, p_n)$ tworzące konfigurację postaci 1 ze s. 53 wykładu 2

Dla dowodu przyjmijmy skrót $\Delta^n = \Delta(p_0, \dots, p_n)$.

D o w ó d. Nie zmniejszymy ogólności, jeśli założymy, że średnica zbioru A nie przekracza żadnej z liczb Lebesgue'a dla par zbiorów (domkniętych i rozłącznych) $\{F_j, \Delta^n - gw_{\Delta^n} p_j\}$ (zbiór F_j i ściana naprzeciw F_j , $F_j = S_j \cap \Delta$), $j = 0, \dots, n$, bo odpowiednio przesunięty zbiór A o tej średnicy można przez homotetię z punktu p przekształcić na zbiór o średnicy z góry danej bez naruszania proporcji miar przy podziale na sektory.

Dla każdego x , $x \in E^n$, rozważmy liczby

$$(9) \quad \varphi_j(x) = \frac{\mu((A+x) \cap S_j)}{\mu(A)}, \quad j = 0, \dots, n$$

Funkcje φ_j są ciągłe⁽⁶⁾. Jest przy tym zawsze

$$\varphi_j(x) \geq 0 \quad \text{dla wszystkich } j$$

oraz

$$\varphi_0(x) + \dots + \varphi_n(x) = 1.$$

Nie zmniejszymy ogólności, jeśli założymy, że $p \in A$ i $p = 0$ (rys. 59).

⁽⁶⁾ Dowód ciągłości funkcji $\mu((A+x) \cap B)$ — gdzie μ jest miarą Lebesgue'a, a A i B zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a — można znaleźć (w przypadku zbiorów położonych na prostej) w książce E. Hewitta i K. Stromberga, *Real and abstract analysis*, Graduate Texts in Mathematics 25, Springer 1975, na s. 143 („10.43. Exercise”).

Jeśli więc $x \in \Delta^n - gw_{\Delta^n} p_j$ (czyli $\lambda_j(x) = 0$), to $\varphi_j(x) = 0$ (bo $(A + x) \cap S_j = \emptyset$).

Niech

$$\varphi(x) = \varphi_0(x)p_0 + \dots + \varphi_n(x)p_n, \quad x \in E^n.$$

Wzór ten określa odwzorowanie ciągle $\varphi : E^n \rightarrow \Delta^n$, które — co wykazaliśmy — spełnia założenia twierdzenia 1. Jest $\Delta^n \subset \varphi(\Delta^n)$ na mocy tego twierdzenia. Istnieje więc x należące do Δ^n takie, że

$$\varphi(x) = \alpha_0 p_0 + \dots + \alpha_n p_n,$$

co znaczy, że dla tego x jest $\alpha_j = \varphi_j(x)$ dla każdego j , i co — por. wzór (9) — kończy dowód.

A oto drugie z zapowiedzianych twierdzeń.

Twierdzenie (Urbanik, 1954)⁽⁷⁾. *W każdy łuk można wpisać łamaną mającą końce na końcach łuku i której odcinki mają długości w danej z góry proporcji.*

Dokładniej: Jeśli f jest odwzorowaniem ciągłym odcinka $0 \leq x \leq 1$ w przestrzeń metryczną takim, że $f(0) \neq f(1)$, to dla każdego układu liczb rzeczywistych nieujemnych $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ istnieje podział

$$(10) \quad 0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} = 1$$

odcinka i liczba c dodatnia taka, że $\alpha_j = c \cdot d(f(x_{j+1}), f(x_j))$, gdzie d jest symbolem odległości w przestrzeni, w której leży łuk.

Dowód. Możemy oczywiście założyć, że $\alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1$.

Podziały (10) traktujemy jako punkty x sympleksu Δ^n o współrzędnych barycentrycznych $\lambda_0(x) = x_1, \lambda_1(x) = x_2 - x_1, \dots, \lambda_n(x) = 1 - x_n$. Mamy $\lambda_j(x) \geq 0$ i $\lambda_0(x) + \dots + \lambda_n(x) = 1$. Każdemu podziałowi x odpowiada łamana wpisana w drogę f mającą wierzchołki w punktach $f(0) = f(x_0), \dots, f(x_1), \dots, f(x_n), f(x_{n+1}) = f(1)$, która wyznacza punkt sympleksu Δ^n mający współrzędne barycentryczne

$$(11) \quad \kappa_j(x) = \frac{d(f(x_{j+1}), f(x_j))}{\sum_j d(f(x_{j+1}), f(x_j))}.$$

⁽⁷⁾ K. Urbanik, Sur un problème de J. F. Pal sur les courbes continues, Bulletin de l'Acad. Pol. des Sci. 2 (1954), 205—207.

Założenie $f(0) \neq f(1)$ zapewnia niezerowanie się mianownika (na mocy warunku trójkąta mianownik jest $\geq d(f(1), f(0))$).

Otrzymaliśmy odwzorowanie κ ciągle sympleksu Δ^n w siebie przypisujące punktowi x punkt o współrzędnych barycentrycznych $\kappa_j(x)$ danych wzorami (11). Mamy

$$\lambda_j(x) = 0 \Rightarrow \kappa_j(x) = 0$$

dla każdego j . Spełnione są więc założenia twierdzenia 1 dla tego odwzorowania, które na mocy tego twierdzenia musi być odwzorowaniem „na”. W szczególności, punkt o współrzędnych $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ jest wartością tego odwzorowania. Oznacza to, że dla pewnego x jest $\kappa_j(x) = \alpha_j$ dla każdego j , a co daje istnienie łamanej wpisanej w drogę f o odcinkach mających długości w proporcji do liczb α_j .

U w a g a. Bez założenia $f(0) \neq f(1)$ twierdzenie jest fałszywe, na co wskazuje przykład drogi f określonej wzorami

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{dla } 0 \leq t \leq 1/2, \\ 2 - 2t & \text{dla } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

o wartościach na prostej. W drogę tę nie można wpisać łamanej o nieparzystej ilości równych odcinków.



Rys. 60. Twierdzenie Urbanika

Mimo to, jak dowiódł Sznirelman⁽⁸⁾, w krzywą zamkniętą zwykłą płaską o krzywiznie ciągłej można wpisać kwadrat. Niedawno Griffiths⁽⁹⁾ osłabił założenie ciągłości krzywizny do założenia o istnieniu parametryzacji mającej pochodne ciągłe (klasa C^1). Czy sama ciągłość parametryzacji — nadal zakładamy nieistnienie samoprzecięć — wystarczy, nie wiadomo.

⁽⁸⁾ L. G. Sznirelman, *O niektórych geometrycznych svojstwach zamkniętych krywych*, Uspechy Matematicheskich Nauk 10 (1944), 34—44; twierdzenie jest w istocie wcześniejsze i było opublikowane przez Sznirelmana w 1929 r. w mniej znanym czasopiśmie; por. notatka w *Kalejdoskopie Steinhauusa*, *Uwagi* (121) (wzmianka na s. 104, że w każdy kontur zamknięty można wpisać kwadrat, nie jest uzasadniona treścią pracy Sznirelmana, który wyraźnie korzysta z ciągłości krzywizny).

⁽⁹⁾ H. B. Griffiths, *The topology of square pegs in round holes*, Proceedings of the London Mathematical Society (3) 62 (1991), 647—672.

O topologicznym charakterze wymiaru euklidesowego (według pracy Brouwera „o zachowaniu liczby wymiarów” (1911)⁽¹⁰⁾.

Ilościowy wniosek z twierdzenia 1. Niech β będzie liczbą rzeczywistą. Jeśli $f: \Delta^n \rightarrow E^n$ jest odwzorowaniem ciągłym takim, że

$$(12) \quad \lambda_j(x) = 0 \Rightarrow \lambda_j(f(x)) \leq \beta$$

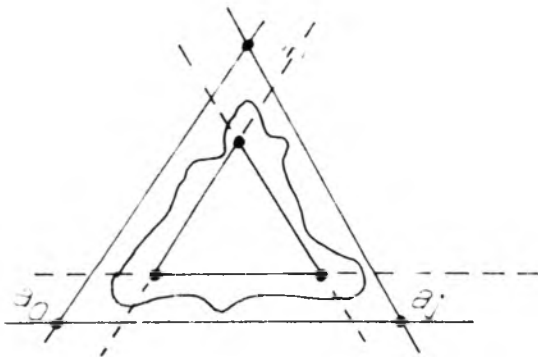
dla każdego j , to obraz $f(\Delta^n)$ sympleksu Δ^n zawiera sympleks $S_\beta = \{x \in \Delta^n : \lambda_j(x) \geq \beta \text{ dla wszystkich } j\}$.

Dowód. Niech $r_\beta: E^n \rightarrow S_\beta$ będzie retrakcją kanoniczną opisaną w wykładzie 2 (s. 51). Niech $h_\beta: S_\beta \rightarrow \Delta^n$ będzie homotetią o środku w barycentrum.

Odwzorowanie $h_\beta \circ r_\beta \circ f: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ spełnia założenia twierdzenia 1.

Istotnie, jeśli $\lambda_j(x) = 0$, to $\lambda_j(f(x)) \leq \beta$, na mocy (12), skąd $\lambda_j(r_\beta(f(x))) = \beta$, a w rezultacie $\lambda_j(h_\beta(r_\beta(f(x)))) = 0$.

Na mocy twierdzenia 1 odwzorowanie $h_\beta \circ r_\beta \circ f$ jest odwzorowaniem na Δ^n , skąd wynika, że $r_\beta \circ f$ jest odwzorowaniem na S_β , a w rezultacie, że f jest odwzorowaniem na S_β .



Rys. 61. Jeśli $0 < \beta < 1/(n+1)$, to S_β jest sympleksem zawartym (koncentrycznie) w Δ^n . Odwzorowanie f nie przeprowadza żadnego punktu z $\partial \Delta^n$ w S_β — obraz brzegu okala sympleks S_β

Twierdzenie 2. Jeśli h jest homeomorfizmem sympleksu Δ^n w przestrzeni E^n , to zbiór $h(\Delta^n)$ ma wewnątrz niepuste.

Dowód. Ustalmy β , $0 < \beta < 1/(n+1)$. Niech T będzie triangulacją sympleksu Δ^n , w której skład wchodzi sympleks S_β (przypomnijmy, że $S_\beta \subset \Delta^n$, $S_\beta \neq \Delta^n$, jeśli $\beta > 0$).

⁽¹⁰⁾ L. E. J. Brouwer, *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl*, Mathematische Annalen 70 (1911), 161—165. W *Collected Works*, t. II, na s. 430—445.

Zamieszczony tu dowód twierdzenia o topologicznym charakterze wymiaru euklidesowego jest wzorowany na dowodzie Brouwera z *Beweis...*; lemat jest niemal ten sam co u Brouwera, a także dalsza część dowodu — ale lematu dowodzimy, korzystając z gotowego już twierdzenia 1, a więc pośrednio opieramy się na lemacie Spernera.

Rozważmy triangulację W przestrzeni E^n na tyle drobną, by dla każdego z wierzchołków w tej triangulacji było

$$(13) \quad h^{-1}(h(\Delta^n) \cap gw_{|W|}w) \subset gw_{|T|}a$$

dla pewnego wierzchołka a triangulacji T .

Przyporządkujemy wierzchołkom w triangulacji W (ograniczmy to przyporządkowanie do tych wierzchołków, których gwiazdy przecinają $h(\Delta^n)$) wierzchołki $\psi(w)$ triangulacji T tak, by

$$(14) \quad h^{-1}(h(\Delta^n) \cap gw_{|W|}w) \subset gw_{|T|}\psi(w),$$

co jest możliwe wobec (13).

Ten warunek daje się zapisać w postaci

$$(15) \quad h(\Delta^n) \cap gw_{|W|}w \subset h(gw_{|T|}\psi(w)).$$

Wynika zeń, że jeśli wierzchołki w_0, \dots, w_n są wierzchołkami sympleksu triangulacji W zawierającego w swoim geometrycznym wnętrzu punkty zbioru $h(\Delta^n)$, to punkty $\psi(w_0), \dots, \psi(w_n)$ są wierzchołkami sympleksu triangulacji T .

Odwzorowanie ψ można więc dla każdego wspomnianego sympleksu $\Delta(w_0, \dots, w_n)$ przedłużyć do odwzorowania liniowego tego sympleksu na sympleks $\Delta(\psi(w_0), \dots, \psi(w_n))$, dostając w rezultacie odwzorowanie ciągłe $h': h(\Delta^n) \rightarrow \Delta^n$ (jest ono określone na całych sympleksach triangulacji W , ale rozpatrujemy je tylko na $h(\Delta^n)$).

Przypuśćmy *a contrario*, że wewnątrz zbioru $h(\Delta^n)$ jest puste.

Ponieważ h' jest liniowe na sympleksach triangulacji W , a zbiór $h(\Delta^n)$ ma wewnątrz puste, więc zbiór $h'(h(\Delta^n))$ ma również wewnątrz puste, nie wypełniając żadnego sympleksu triangulacji T . Stąd istnienie retrakcji r zbioru $h'(h(\Delta^n))$ na podzbiór szkieletu $(n-1)$ -wymiarowego triangulacji T , przy której x i $r(x)$ pozostają w tym samym sympleksie triangulacji T .

Przez złożenie dostajemy odwzorowanie $g = r \circ h' \circ h: \Delta^n \rightarrow \Delta$.

Z (15) wynika, że zbiory $gw_{|T|}\psi(w)$, gdzie w są wierzchołkami triangulacji W , pokrywają razem sympleks Δ^n .

Niech $x \in \Delta^n$. Weźmy pod uwagę wszystkie wierzchołki w triangulacji W takie, że $x \in gw_{|T|}\psi(w)$.

Mamy

$$h(x) \in gw_{|W|}w,$$

na mocy (14), a w rezultacie

$$h'(h(x)) \in gw_{|T|}\psi(w).$$

Wnioskujemy stąd, że wartość $g(x) = r(h'(h(x)))$ leży w sympleksie o wierzchołku $\psi(w)$, a więc w sympleksie, w którym leży x .

Stąd wynika, że odwzorowanie g spełnia również w szczególności założenie (12) lematu. Ale obraz odwzorowania g , leżąc w szkieletcie $(n-1)$ -wymiarowym sympleksu Δ^n , nie pokrywa żadnego sympleksu triangulacji T , a więc nie pokrywa też sympleksu S_β , który wchodzi w jej skład. Jest to sprzeczne z tezą ilościowego wniosku z twierdzenia 1.

Teraz już w prosty sposób wnioskujemy, że sympleksy Δ^m i Δ^n nie są homeomorficzne, jeśli $m \neq n$.

D o w ó d. Przyjmijmy, że $m < n$. Sympleks Δ^m jest wtedy homeomorficzny ze ścianą sympleksu Δ^n , która mając wymiar mniejszy niż n — jest podzbiorem rzadkim sympleksu Δ^n i tym samym podzbiorem rzadkim przestrzeni E^n . Jeśliby istniał homeomorfizm Δ^n na Δ^m , to istniałby homeomorfizm sympleksu Δ^n na wspomnianą jego ścianę. Jest to sprzeczność z dowiedzionym twierdzeniem.

Twierdzenie przenosi się na przestrzenie euklidesowe różniące się wymiarami: *przestrzenie E^m i E^n nie są homeomorficzne, jeśli $m \neq n$.*

D o w ó d. Przyjmijmy, że $m < n$. Przestrzeń E^m jest wtedy homeomorficzna z podprzestrzenią m -wymiarową przestrzeni E^n , a więc z podzbiorem rzadkim przestrzeni E^n . Jeśliby istniał homeomorfizm E^n na E^m , to sympleks Δ^n położony w E^n i mający ścianę m -wymiarową zawartą w E^m byłby przekształcony homeomorficznie na podzbiór przestrzeni E^m , a po złożeniu z przesunięciem i podobieństwem, w swoją ścianę wymiaru m , wbrew poprzedniemu twierdzeniu.

Nieistnienie homeomorfizmu przestrzeni euklidesowych różniących się wymiarami, dowiedzione przez Brouwera, uprawomocnia dyscyplinę nazywaną *topologią przestrzeni euklidesowych*⁽¹¹⁾.

Wiemy — za Cantorem⁽¹²⁾ — że w zakresie czystej teorii mnogości możliwe są odwzorowania wzajemnie jednoznaczne przestrzeni euklidesowych różniących się wymiarami. Twierdzenie Brouwera uwidacznia znaczenie założenia

⁽¹¹⁾ Wszystkie twierdzenia tego wykładu pochodzą z prac Brouwera z lat 1911—1913. Prace te obejmują wszakże szerszy krąg zagadnień wymagających mocniejszych środków dowodowych (orientacja, stopień odwzorowania itp.). Eliminację tych mocniejszych środków w węższym zakresie zagadnień, który tu jest omawiany, zawdzięczamy Spernerowi.

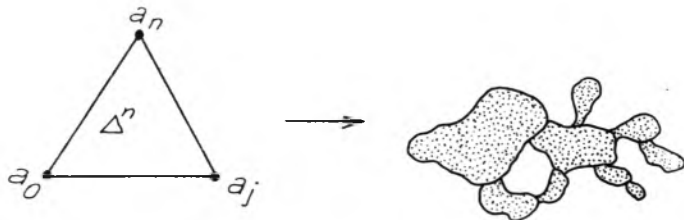
⁽¹²⁾ Georg Cantor, *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 84 (1878), 242—258. W ślad za tą pracą Cantor opublikował (1879) dowód twierdzenia o nieistnieniu odwzorowania ciągłego wzajemnie jednoznacznego między przestrzeniami euklidesowymi różniącymi się wymiarami. Na błąd w tej pracy Cantora (niepoprawialny) zwrócił uwagę E. Jürgens (1889), dowodząc tego twierdzenia dla wymiarów ≤ 3 . Dowód poprawny dla wymiarów ≤ 2 podał jeszcze w 1878 r. J. Lüroth. Na temat ciekawej historii problemu rozróżnienia topologicznego przestrzeni euklidesowych różniących się wymiarami pisze J. W. Dauben, *Historia Mathematica* 2 (1975), 273—288; por. także komentarz w *Collected Works Brouwera*, t. II, do pracy cytowanej tu w przypisie (10), w której problem został rozstrzygnięty.

o ciągłości odwzorowania, która usuwa patologię zawartą w twierdzeniu Cantora.

Twierdzenie o zachowaniu wymiaru — jak się je nazywa — nie zamyka jednak problemów. Twierdzenie, którego dowiedliśmy, orzeka, że obraz homeomorficzny sympleksu Δ^n nie może być podzbiorem rzadkim w E^n . W nietrudny sposób można uzyskać więcej, a mianowicie to, że obraz homeomorficzny sympleksu Δ^n , położony w E^n , jest domknięciem swego wnętrza, tj. że w każdym otoczeniu każdego swego punktu zawiera zbiory otwarte (niepuste) przestrzeni E^n . Jest tak dlatego, że stwierdzenie niepustości wnętrza dotyczy wszelkich sympleksów wymiaru n , zawartych w Δ^n .

Ale nasz ostatni wniosek nie tłumaczy na przykład tego, czym jest obraz wnętrza geometrycznego sympleksu Δ^n . Czy punkty tego wnętrza mogłyby przejść na punkty położone na brzegu obrazu? Przekonanie o tym, że tak być nie może, daje się poprzeć dowodem, który wszakże wymaga rozwinięcia metod. Brouwer użył do tego celu stopnia odwzorowania⁽¹³⁾.

Później Sperner (1928) pokazał, że można to zrobić bardziej elementarnie.



Rys. 62. Obraz homeomorficzny Δ^n w E^n według twierdzenia 2

Twierdzenie 3 (Spernera⁽¹⁴⁾ o zamocowaniu). Jeśli zbiory otwarte U_0, \dots, U_n pokrywają sympleks $\Delta^n = \Delta(a_0, \dots, a_n)$ tak, że

$$U_i \subset gw_{\Delta^n} a_i,$$

to $U_0 \cap \dots \cap U_n \neq \emptyset$.

Dowód. Niech V_0, \dots, V_n będą zbiorami otwartymi pokrywającymi Δ^n takimi, że $V_i \subset cl V_i \subset U_i$ (istnienie takich zbiorów wynika z lematu o zmniejszaniu zbiorów w pokryciach; Aneks, s. 69).

Z lematu Urysohna wynika istnienie funkcji ciągłych $f_i: \Delta^n \rightarrow [0,1]$ takich, że

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin U_i \\ 1 & \text{dla } x \in V_i \end{cases}$$

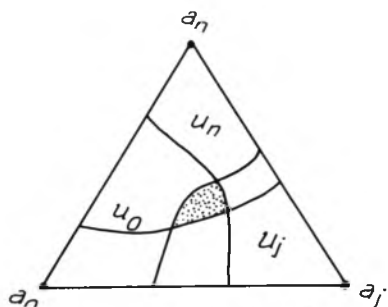
⁽¹³⁾ L.E.J. Brouwer, *Beweis der Invarianz der n-dimensionalen Gebietes*, Mathematische Annalen 71 (1912), 305—313; w *Collected Works*, t. II, na s. 477—488.

⁽¹⁴⁾ E. Sperner, *Neuer Beweis...*

Niech $f(x) = (f_0(x)a_0 + \dots + f_n(x)a_n)/(f_0(x) + \dots + f_n(x))$ (wzór jest poprawny, bo mianownik jest stale różny od 0; jest nawet ≥ 1). Współczynniki przy a_i są nieujemne i ich suma jest równa 1. Stąd, f odwzorowuje sympleks Δ^n w siebie.

Przypuśćmy, że $U_0 \cap \dots \cap U_n = \emptyset$. Znaczy to, że dla każdego x należącego do Δ^n istnieje j takie, że $x \notin U_j$, a więc istnieje j takie, że $f_j(x) = 0$. Znaczy to, że f odwzorowuje sympleks Δ^n w brzeg Δ^n . Ponadto, jeśli $\lambda_i(x) = 0$, to $x \notin U_i$, a wtedy $f_i(x) = 0$, skąd $\lambda_i(f(x)) = 0$. Odwzorowanie f ma więc własność (1).

Otrzymaliśmy sprzeczność z twierdzeniem 1.



Rys. 63. $U_0 \cap \dots \cap U_j \neq \emptyset$

Inne formy twierdzenia o zamocowaniu.

1. Jeśli zbiory domknięte F_0, \dots, F_n pokrywają sympleks $\Delta(a_0, \dots, a_n)$ tak, że dla każdego j ściana leżąca naprzeciw wierzchołka a_j jest zawarta w F_j , to $F_0 \cap \dots \cap F_n \neq \emptyset$.

Twierdzenie wynika z dowiedzonego przez prawa de Morgana.

Przejdzie do innego wariantu, w którym zbiory domknięte pokrywają sympleks z naroży, wymaga lematu Lebesgue'a.

2. Jeśli zbiory domknięte F_0, \dots, F_n pokrywają sympleks $\Delta(a_0, \dots, a_n)$ tak, że

$$(16) \quad F_j \subset gw_{\Delta^n} a_j \quad \text{dla każdego } j,$$

to $F_0 \cap \dots \cap F_n \neq \emptyset$.

D o w ó d. Przypuśćmy, że $F_0 \cap \dots \cap F_n = \emptyset$. Z lematu Lebesgue'a (formy dwoistej do dowiedzonej, Aneks, s. 70) wynika istnienie liczby $\delta > 0$ takiej, że każdy zbiór o średnicy $\leq \delta$ jest rozłączny z jednym ze zbiorów F_j . Dla każdego j weźmy liczby Lebesgue'a δ_j dla pokryć sympleksu $\Delta^n - F_j$ i $gw_{\Delta^n} a_j$. Niech δ_* będzie najmniejszą spośród liczb: liczby δ i liczb δ_j .

Niech V_j będzie sumą zbiorów otwartych przecinających zbiór F_j i mających średnicę $\leq \delta_*/2$. Zbiory V_j są otwarte; mamy

$$F_j \subset V_j \subset gw_{\Delta^n} a_j,$$

gdzie drugą inkluzję dostajemy z nierówności $\delta_* \leq \delta_j$.

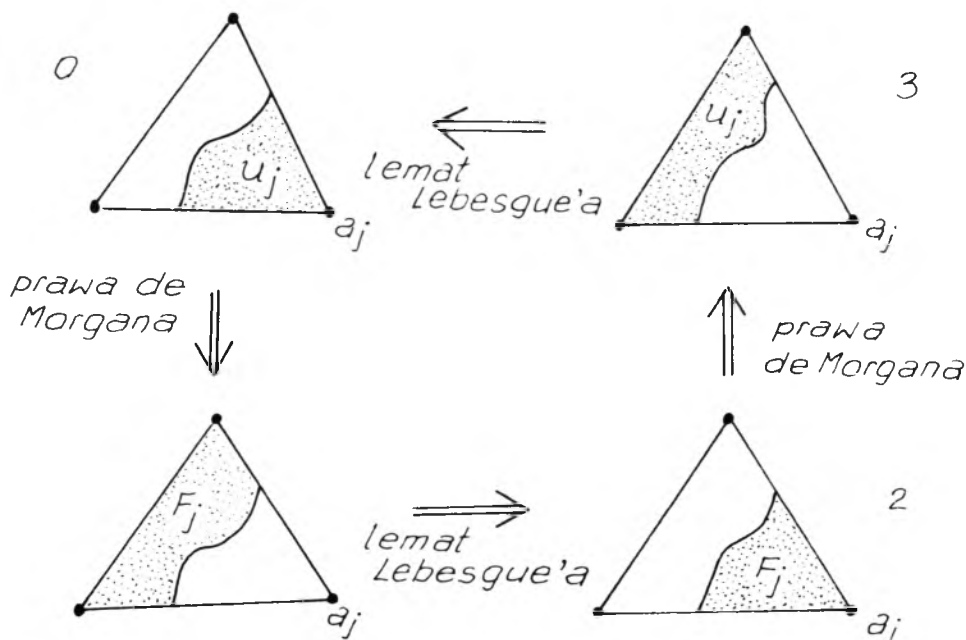
Mamy $V_0 \cap \dots \cap V_n \neq \emptyset$, na mocy oryginalnej formy twierdzenia o zamocowaniu.

Dostajemy w ten sposób sprzeczność, bo punkt leżący w tym przekroju należałby do $n+1$ zbiorów otwartych o średnicach $\leq \delta_*/2$ takich, że każdy ze zbiorów F_j miałby punkt wspólny z jednym z nich. Suma tych zbiorów otwartych miałaby średnicę $\leq \delta_*$, tym samym $\leq \delta$, i przecinałaby przy tym każdy ze zbiorów F_j , wbrew własności liczby δ .

Korzystając z praw de Morgana, dostaje się jeszcze jedną formę twierdzenia:

3. Jeśli zbiory otwarte U_0, \dots, U_n pokrywają sympleks $\Delta(a_0, \dots, a_n)$ tak, że dla każdego j ściana leżąca naprzeciw wierzchołka a_j jest zawarta w U_j , to $U_0 \cap \dots \cap U_n \neq \emptyset$.

Dostaliśmy w ten sposób cztery równoważne ze sobą — bądź to przez prawa de Morgana, bądź po przez lemat Lebesgue'a — formy twierdzenia Spernera o zamocowaniu.



Rys. 64. Numer 0 nosi oryginalna wersja twierdzenia. Wynikania $3 \Rightarrow 0$ nie dowodziliśmy

Wykazaliśmy, że lemat Spernera pociąga twierdzenie 1 (o nieistnieniu retrakcji) i że ono pociąga z kolei twierdzenie 3 (o zamocowaniu).

Wykażemy, że twierdzenie 3 pociąga w łatwy sposób lemat Spernera.

D o w ó d. Niech K będzie triangulacją sympleksu $\Delta^n = \Delta(a_0, \dots, a_n)$ i niech wierzchołki b triangulacji K będą opatrzone numerami $\psi(b)$ ze zbioru $\{0, \dots, n\}$ tak, że spełniony jest warunek (5) dla numeracji Spernera. Weźmy pod uwagę dla każdego i zbiór $U_j = \bigcup \{gw_{|K|} b : \psi(b) = j\}$. Zbiory U_j są otwarte i pokrywają sympleks Δ^n . Ponadto z własności (5) numeracji Spernera wynika, że $a_j \in U_j \subset gw_{\Delta^n} a_j$. Korzystając z twierdzenia o zamocowaniu wnosimy, że $U_0 \cap \dots \cap U_n \neq \emptyset$, ale zbiory U_j są otwarte i są sumami całych sympleksów (otwartych n -wymiarowych) triangulacji K . Stąd, w przekroju $U_0 \cap \dots \cap U_n$

jest zawarty co najmniej jeden taki sympleks. Na jego wierzchołkach numeracja Spernera przyjmuje wszystkie wartości.

Widzimy więc, że twierdzenia o niemożliwości retrakcji kuli na brzeg, lemat Spernera, a także twierdzenie o zamocowaniu, są w łatwy sposób równoważne⁽¹⁵⁾.

Dowodząc jednak lematu Spernera, nie wróciliśmy całkiem do punktu wyjścia. Nie zakładaliśmy w tym dowodzie, że triangulacja K jest iteracją podziału barycentrycznego, a więc dowiedliśmy lematu Spernera ogólnie dla wszelkich triangulacji sympleksu; zwróćmy może jednak uwagę także i na koszt: nie dowiedliśmy, że ilość sympleksów z pełną numeracją jest nieparzysta (mimo że to jest prawda; por. dalsze uwagi).

Twierdzenie o zamocowaniu można wprowadzić również wprost z lematu Spernera.

Niech bowiem U_0, \dots, U_n będą zbiorami otwartymi pokrywającymi sympleks $\Delta^n = \Delta(a_0, \dots, a_n)$ tak, że $U_j \subset gw_{\Delta^n} a_j$ dla każdego j . Niech T będzie triangulacją sympleksu Δ^n na tyle drobną, by dla każdego jej wierzchołka b było (lemat Lebesgue'a)

$$(17) \quad gw_{|T|} b \subset U_j$$

dla pewnego j . Przypisując wierzchołkom b triangulacji T liczby $\varphi(b)$ tak, by $gw_{|T|} b \subset U_{\varphi(b)}$, co jest możliwe wobec (17), dostajemy numerację spernerowską tej triangulacji. Na mocy lematu Spernera istnieje sympleks triangulacji T , na którego wierzchołkach numeracja φ przyjmuje wszystkie wartości $0, \dots, n$. Wnętrze tego sympleksu leży w przekroju $U_0 \cap \dots \cap U_n$.

Przystępujemy teraz do serii twierdzeń — zapowiadanych już wcześniej — z których wyniknie, że pojęcie punktów brzegowych sympleksów (kul) ma charakter topologiczny. Pokażemy mianowicie, że przy odwzorowaniu homeomorficznym sympleksu na siebie (na kule tego samego wymiaru) punkty brzegu przechodzą na punkty brzegu, a punkty wewnętrzne na punkty wewnętrzne. Później w wykładzie 5 (s. 125), w którym pojawi się pojęcie deformacji dogodne dla tego celu — znajdziemy własność wyrażoną topologicznie, która rozróżni punkty brzegu sympleksu (kuli) od punktów z wnętrza.

Twierdzenie o zamocowaniu — tak je nazwaliśmy, ponieważ zbiory U_i dały się w nim zamocować jednym punktem — zawiera, podobnie jak twierdzenie o nieistnieniu retrakcji, w lakonicznej formie istotną treść wielu dalszych twierdzeń topologii przestrzeni euklidesowych. O znaczeniu tego twierdzenia dla teorii topologicznego pojęcia wymiaru będzie mowa w następnym wykładzie. Na razie wyprowadzimy zeń zapowiedziane — podstawowe dla

⁽¹⁵⁾ Z punktu widzenia logiki formalnej wszystkie twierdzenia prawdziwe są równoważne. Mówiąc o równoważności trzech wymienionych twierdzeń (a można by dodać jeszcze do tego twierdzenie o punkcie stałym dla kul i twierdzenie o istotności odwzorowania tożsamościowego sfery na siebie, o czym będzie mowa później), mamy na myśli to, że twierdzenia te uzyskuje się jedno z drugich, używając tylko formalizmu mnogościowego.

dalszego ciągu — twierdzenie o obrazie homeomorficznym sympleksu Δ^n , jeśli jest on położony w E^n .

Twierdzenie (według Spernera, 1928)⁽¹⁶⁾. Jeśli h jest homeomorfizmem sympleksu Δ^n na podzbiór przestrzeni E^n i p jest punktem wewnętrznym sympleksu Δ^n , to $h(p)$ jest punktem wewnętrznym zbioru $h(\Delta^n)$; inaczej: $h(\text{int } \Delta^n) \subset \text{int } h(\Delta^n)$.

Dowód. Dany punkt p z wnętrza sympleksu Δ^n wyznacza podział (symplicjalny) sympleksu Δ^n na $n+1$ sympleksów C_0, \dots, C_n mających p jako wierzchołek, a ściany $(n-1)$ -wymiarowe sympleksu Δ^n jako swoje ściany przeciwległe do wierzchołka p . Ta konfiguracja przenosi się do obrazu $h(\Delta^n)$, który jest w ten sposób sumą $n+1$ zbiorów domkniętych $h(C_j)$ mających jeden punkt wspólny $h(p)$.

Przypuśćmy, że $h(p)$ leży na brzegu zbioru $h(\Delta^n)$.

Niech Q będzie kulą domkniętą o środku $h(p)$ na tyle małą, by przeciwobraz $h^{-1}(Q)$ był zawarty we wnętrzu sympleksu Δ^n . Przekrój $S \cap h(\Delta^n)$ sfery S kuli Q ze zbiorem $h(\Delta^n)$ jest sumą zbiorów

$$(18) \quad h(C_j) \cap S, \quad j = 0, \dots, n.$$

Zbiory te nie mają punktu wspólnego, ponieważ jedynym punktem wspólnym zbiorów $h(C_j)$ jest punkt $h(p)$, a ten leży poza S . Znaczy to, że każdy punkt sfery S leży w nie więcej niż n zbiorach (18).

Sfera S — jako sfera euklidesowa $(n-1)$ -wymiarowa — ma dowolnie drobne pokrycia skończone zbiorami domkniętymi takie⁽¹⁷⁾, że

(19) każdy punkt sfery S należy do nie więcej niż n zbiorów pokrycia.

Niech \mathcal{P} będzie pokryciem sfery S zbiorami domkniętymi, przy tym na tyle drobnym, by dla każdego punktu x sfery S suma tych elementów pokrycia \mathcal{P} , do których należy x , miała średnicę mniejszą niż liczba Lebesgue'a rodziny zbiorów (18). Suma elementów pokrycia \mathcal{P} , do których należy x , przecina nie więcej niż n spośród zbiorów $h(C_j) \cap S$. Zbiory $h(C_j) \cap S$ powiększymy teraz tak, że będą pokrywać S , dodając do nich zbiory pokrycia \mathcal{P} według następującej reguły.

Zbiór A pokrycia \mathcal{P} jest dołączony wyłącznie do jednego ze zbiorów $h(C_j) \cap S$: jeśli A nie przecina żadnego ze zbiorów $h(C_j) \cap S$, to A może być dołączone do któregośkolwiek; natomiast jeśli przecina jakieś, to do jednego z tych, które przecina.

⁽¹⁶⁾ E. Sperner, *Neuer Beweis ...* Ten dowód według Spernera można znaleźć między innymi u G. M. Gołuzina, *Geometricheskaja teorija funkcij kompleksnogo pieriemennogo*, Moskwa — Leningrad 1952, na s. 265—273, a także u S. Stoilowa, *Leçons sur les principes topologiques de la theorie des fonctions analytiques*, Paris 1956 (tłum. ros., 1964). Ten dowód ma tę przewagę nad innymi, że nie korzysta się w nim z niczego poza twierdzeniem Spernera o zamocowaniu.

⁽¹⁷⁾ Sfera n -wymiarowa jest topologicznie wielościanem. Dla dowolnej jej triangulacji pokrycie sfery gwiazdami tej triangulacji ma własność (19). Istnieją triangulacje dowolnie drobne. Więcej na ten temat będzie w wykładzie 4 o wymiarze.

Powiększone w ten sposób zbiory $h(C_j) \cap S$ będziemy oznaczać przez S_j . Zbiory S_j pokrywają S , co jest oczywiste.

Pokażemy, że

(*) żaden punkt sfery S nie należy do więcej niż n spośród zbiorów S_j .

Istotnie, niech $x \in S$. Zbiory pokrycia \mathcal{P} , do których należy x , tworzą rodzinę $U(x)$ składającą się z nie więcej niż n elementów tego pokrycia.

Jeśli punkt x nie należy do żadnego ze zbiorów (18), to może należeć do zbioru S_j jedynie w ten sposób, że $x \in W \subset S_j$ dla pewnego W z rodziny $U(x)$. Stąd, punkt x należy do nie więcej niż n zbiorów S_j .

Jeśli punkt x należy do chociażby jednego ze zbiorów (18), to dla przeprowadzenia dowodu zauważmy najpierw, że jeden ze zbiorów (18), niech będzie to zbiór $h(C_{j*}) \cap S$, nie przecina żadnego ze zbiorów rodziny $U(x)$ (wynika to z założenia o średnicach zbiorów pokrycia \mathcal{P}). Dowód (*) będzie zakończony, jeśli pokażemy, że $x \notin S_{j*}$.

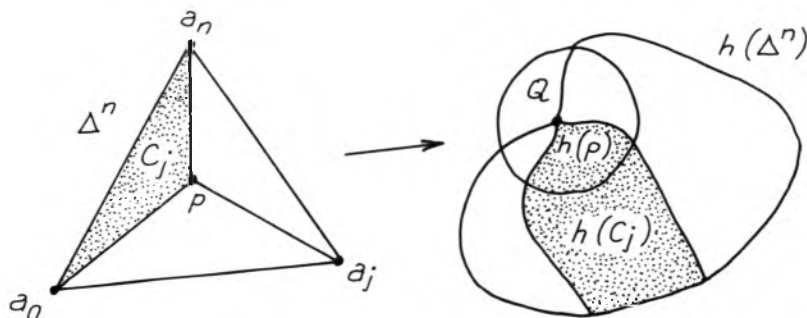
Jest tak, bo $x \in S_{j*}$ przy jednoczesnym $W \cap (h(C_{j*}) \cap S) = \emptyset$ dla $W \in U(x)$, a więc przy $x \notin h(C_{j*}) \cap S$, implikowałoby istnienie elementu W pokrycia \mathcal{P} takiego, że $x \in W \subset h(C_{j*}) \cap S$, tj. zbioru z pokrycia \mathcal{P} , który jest dołączony do $h(C_{j*}) \cap S$ w celu zbudowania zbioru S_{j*} . Jednak wobec $x \in W$, zbiór W nie może być dołączony do zbioru $h(C_{j*}) \cap S$, lecz do tego ze zbiorów (18), do którego należy punkt x , a w rozważanym przypadku zakłada się istnienie tego rodzaju zbiorów. Sprzeczność.

Weźmy teraz we wnętrzu kuli Q punkt q leżący poza $h(\Delta^n)$ (tego rodzaju punkt zawsze się znajdzie, bo środek kuli Q leży na brzegu zbioru $h(\Delta^n)$). Rozważmy retrakcję

$$r: Q - \{q\} \rightarrow S,$$

jakąkolwiek spośród istniejących. Zbiory $r^{-1}(S_j) \cap h(\Delta^n)$ pokrywają tę część zbioru $h(\Delta^n)$, która leży w Q . Żaden punkt nie należy do więcej niż n spośród tych zbiorów.

Zbiory $h(C_j)$ zmodyfikujemy w obrębie kuli Q , odejmując od każdego z nich punkty kuli Q i dodając w zamian (do j -ego zbioru) zbiór $r^{-1}(S_j) \cap h(\Delta^n)$.



Rys. 65. Przypuśćmy, że $h(p)$ leży na brzegu zbioru $h(\Delta^n)$

Dostajemy zbiory D_j , dające nadal w sumie $h(\Delta^n)$ i przy tym takie, że żaden punkt zbioru $h(\Delta^n)$ nie leży w więcej niż n zbiorach D_j .

Przeciwbrazy $h^{-1}(D_j)$ tych zbiorów pokrywają sympleks Δ^n , spełniając założenia z twierdzenia o zamocowaniu (w wersji dla zbiorów domkniętych zawierających ściany), bo różnią się od zbiorów C_j jedynie na $h^{-1}(Q)$, a więc poza brzegiem sympleksu. Ale zbiory $h^{-1}(D_j)$ nie spełniają tezy tego twierdzenia, bo punkty sympleksu Δ^n należą do nie więcej niż n spośród nich i wobec tego ich przekrój jest pusty.

Ta sprzeczność kończy dowód twierdzenia.

Twierdzenie Brouwera o zachowaniu otwartości (1912)⁽¹⁸⁾. *Podzbiór przestrzeni euklidesowej homeomorficzny z podzbiorem otwartym tej przestrzeni jest jej podzbiorem otwartym.*

D o w ó d. Niech U będzie podzbiorem otwartym przestrzeni E^n i niech h będzie homeomorfizmem zbioru U na podzbiór V tej przestrzeni. Pokażemy, że V jest otwarte w E^n .

Dla dowodu, niech $q \in V$. Niech $p = h^{-1}(q)$. Jest $p \in U$. Wobec otwartości U istnieje sympleks n -wymiarowy Δ^n zawarty w U z punktem p w swoim wnętrzu. Na mocy dowiedzonego twierdzenia punkt $q = h(p)$ należy do wnętrza (względem E^n) zbioru $h(\Delta^n)$, a w rezultacie do wnętrza zbioru V .

U w a g i. 1. Nie powinna mylić pozorna tautologiczność twierdzenia. Jeśliby homeomorfizm h był homeomorfizmem całej przestrzeni E^n na siebie, to otwartość zbioru V w E^n wynikałaby stąd, że homeomorfizmy przekształcają podzbiory otwarte dziedziny na podzbiory otwarte obrazu, którym byłaby teraz przestrzeń E^n . W przypadku kiedy obraz jest $h(U)$ — dostalibyśmy jedynie to, że $h(U)$ jest otwarte w $h(U)$, co jest prawdą nic nie znaczącą.

2. Można by podać następujący sposób uzyskania twierdzenia o zachowaniu otwartości. Mając homeomorfizm $h: \Delta^n \rightarrow h(\Delta^n)$, Δ^n i $h(\Delta^n)$ leżą w E^n , przedłużamy ten homeomorfizm do homeomorfizmu $g: E^n \rightarrow E^n$. Na mocy ogólnej własności homeomorfizmów, wspomnianej w poprzedniej uwadze, zbiór $g(\text{int } \Delta^n)$ jest podzbiorem otwartym przestrzeni E^n , ale $g|_{\Delta^n} = h$, stąd $h(\text{int } \Delta^n)$ jest otwarte w E^n . Otrzymujemy, $h(\text{int } \Delta^n) \subset \text{int } h(\Delta^n)$. Mając to, na drodze już znanej, dostalibyśmy twierdzenie o zachowaniu otwartości.

Tego rodzaju dowód przeprowadził dla $n = 2$ Schoenflies (1906)⁽¹⁹⁾ pokazując, że homeomorfizm krążka płaskiego na podzbiór płaszczyzny ma przed-

⁽¹⁸⁾ L. E. J. Brouwer, *Beweis der Invarianz* ... (1912).

⁽¹⁹⁾ A. Schoenflies, *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten II*, Leipzig 1908; cytuje się również tegoż autora *Beiträge zur Theorie der Punktmengen III*; Stoilow w *Leçons* ... (s. 37) powołuje się na jeszcze wcześniejsze prace Schoenfliesa, *Mathematische Annalen* 62 (1906), 286—328. Prace Schoenfliesa dają początek działowi topologii nazywanemu *teorią położenia – connexus*, w którym nie rozważa się figury samej w sobie, lecz w stosunku do reszty

łużenie do homeomorfizmu płaszczyzny na siebie; w istocie dowiódł więcej, a mianowicie, że tego rodzaju przedłużenie ma już homeomorfizm z okręgu. Jest to twierdzenie znane jako twierdzenie Schoenfliesa (w wykładzie 1 była wzmianka o przypadku wielokątowym twierdzenia Schoenfliesa — pełną wersję podaje wykład 7).

Przykład Alexandera (1924) — słynna *kula rogata*⁽²⁰⁾ — pokazuje, że już dla $n=3$ ten sposób dowodu zawodzi.

3. Twierdzenie o zachowaniu otwartości nie jest całkiem banalne także w przypadku $n=1$, tj. dla prostej, chociaż dowód nie napotyka trudności właściwych wyższym wymiarom.

D o w ó d. Niech U będzie przedziałem otwartym prostej. Niech V będzie podzbiorem prostej homeomorficznym z U . Ponieważ homeomorfizmy zachowują własności topologiczne, więc V jest zbiorem spójnym (wielopunktowym). Podzbiory spójne prostej wraz z każdym z dwóch punktów zawierają cały przedział między tymi punktami (są wypukłe). Są więc podzbiórami prostej zawierającymi wszystkie punkty leżące między ich kresami (być może nieskończonymi). Te kresy mogą do nich należeć bądź nie. To pierwsze jest jednak niemożliwe, ponieważ usunięcie kresu nie rozspaja podzbioru prostej. Tymczasem każdy punkt przedziału otwartego rozspaja ten przedział. Zbiory — z założenia homeomorficzne — różniłyby się więc własnością topologiczną, jaką jest rozspajanie przez punkt. Zbiór V zatem jest odcinkiem bez końców, półprostą bez końca, bądź całą prostą. W każdym z tych przypadków stanowi podzbiór otwarty prostej.

4. Z twierdzenia o zachowaniu otwartości wynika znane nam już:

Twierdzenie. *Przestrzenie euklidesowe różniące się wymiarami nie są homeomorficzne.*

D o w ó d. Jeśli $m < n$, to przestrzeń E^m można umieścić w E^n jako podzbiór rzadki złożony z punktów $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$. Homeomorfizm E^n na E^m byłby więc homeomorfizmem zbioru otwartego w E^n na zbiór, który nie jest w E^n otwarty, co jest sprzeczne z twierdzeniem o zachowaniu otwartości.

Twierdzenie to można wypowiedzieć mocniej:

przestrzeni. Dwa zbiory są *jednakowo położone* w przestrzeni, jeśli istnieje homeomorfizm przestrzeni przekształcający jeden zbiór na drugi.

Twierdzenie Schoenfliesa wynika również z twierdzenia Riemanna o istnieniu odwzorowania konforemnego krążka otwartego na obszar jednospójny; twierdzenie Riemanna było dowiedzione przez Carathéodory'ego (1913).

⁽²⁰⁾ J. W. Alexander, *An example of a simply connected surface bounding a region which is simply connected*, Proc. Nat. Acad. Sci. 10 (1924), 8—10. Sfera Aleksandra jest położona inaczej niż sfera $|x|=1$. Opisy sfery rogatej można znaleźć w książce Binga, a także w rozprawie L. W. Kiełdysz, *Topologičeskie włożenija w ewklidowo prostranstwo*, Trudy Mat. Inst. im. Stieklowa 81 (1966), w popularnej wersji zaś między innymi w książce A. Leika, *Zbiory*, Warszawa 1964, s. 153.

Nie istnieją odwzorowania ciągle wzajemnie jednoznaczne przestrzeni euklidesowej na przestrzenie euklidesowe różniące się od niej wymiarem.

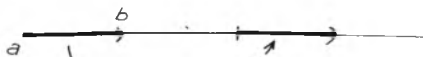
Chcąc tego dowieść, wcześniej jest dobrze wiedzieć, że:

Odwzorowanie ciągle wzajemnie jednoznaczne przestrzeni euklidesowej na przestrzeń euklidesową jest homeomorfizmem, czyli że odwzorowanie doń odwrotne jest ciągle.

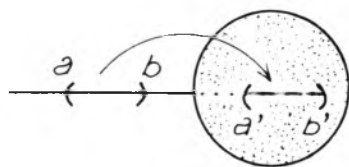
Stąd, również i w twierdzeniu o zachowaniu otwartości, wystarczyłoby zakładać zbiór, że V jest obrazem ciągłym wzajemnie jednoznacznym zbioru U .

5. Twierdzenie o zachowaniu otwartości wyraża ważną własność przestrzeni euklidesowych, której na ogół nie mają inne przestrzenie.

Dla przykładu, półprosta $y \geq a$ nie ma własności zachowania otwartości.



Rys. 66. Odcinek $a \leq x < b$ półprostej $x \geq a$ jest w niej otwarty, przesunięty (jakkolwiek) przestaje być w niej otwarty



Rys. 67. W pozycji (a, b) łuk jest zbiorem otwartym, przesunięty do pozycji $(a' b')$ przestaje nim być

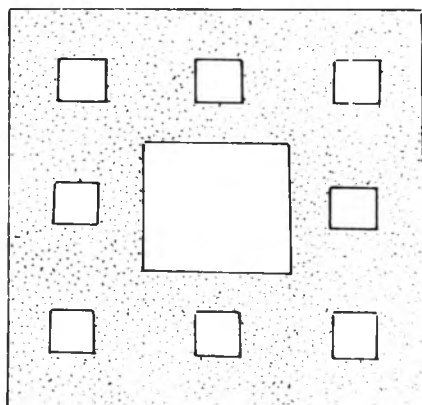
Przyczyną jest tu niejednorodna budowa półprostej $x \geq a$, inna w punkcie a niż w pozostałych.

Przykłady można wszakże znaleźć również wśród przestrzeni o dużym stopniu jednorodności. Na przykład

zbiór Cantora nie ma własności zachowania otwartości, ponieważ zbiory Cantora zawierają zbiory Cantora jako podzbiory rzadkie. Z analogicznych powodów nie ma własności otwartości krzywa uniwersalna płaska Sierpińskiego, nazywana dywanem Sierpińskiego⁽²¹⁾, i to samo jest prawdą dla jej wyżej wymiarowych analogonów.

Z twierdzenia o zachowaniu otwartości wyciągnijmy następujące wnioski.

1. Sfera S^n nie ma zanurzeń w E^n . Istotnie, sferę S^n można przedstawić w postaci dwóch półkul otwartych, homeomorficznych z E^n , na przykład



Rys. 68. Dywan Sierpińskiego — drugie przybliżenie (opis można znaleźć na przykład w książce A.S. Parchomienki)

⁽²¹⁾ W. Sierpiński, *O krzywej zawierającej w sobie obrazy wsiąkiej krzywej*, Matematyczny Sbornik 30 (1916), 267—287; w *Oeuvres choisies* w t. II, s. 107—119; A. S. Parchomienko, *Co to jest linia*, Warszawa 1961, rozdz. III, s. 90.

$S^n - \{p\}$ i $S^n - \{q\}$, $q \neq p$. Jeśliby sfera S^n miała zanurzenie w E^n , to obraz każdej ze wspomnianych dwu części byłby, na mocy twierdzenia o zachowaniu otwartości, otwarty w E^n , stąd byłby otwarty też obraz ich sumy, czyli obraz S^n . Obraz sfery S^n jest jednak zwarty, a więc domknięty i ograniczony, w szczególności nie wypełniający całości E^n . Mielibyśmy w E^n podzbiór niepusty domknięto-otwarty, różny od całości, co jest sprzeczne ze spójnością E^n .

2. Przez *rozmaitość n -wymiarową* rozumie się przestrzeń, której każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z E^n (przykład: sfera S^n). *Jeśli M jest rozmaitością zwartą, N rozmaitością spójną, obie $a, h: M \rightarrow N$ jest zanurzeniem, to $h(M) = N$.*

Istotnie, istnieje pokrycie n -wymiarowe, rozmaitości M zbiorami otwartymi homeomorficznymi z E^n . Obraz $h(U)$ każdego z nich jest podzbiorem otwartym rozmaitości N , co wynika z twierdzenia o zachowaniu otwartości (zbiór $h(U)$ jest zawarty w zbiorze homeomorficznym z E^n , jeśli U jest dostatecznie małe). Zbiór $h(M)$ jako suma zbiorów $h(U)$ jest otwarty, jest natomiast domknięty jako obraz zbioru zwartego. Jeśliby $h(M) \neq N$, to mielibyśmy sprzeczność ze spójnością N .

3. Dowiedliśmy, że $h(\text{int } \Delta^n) \subset \text{int } h(\Delta^n)$, jeśli h jest homeomorfizmem sympleksu Δ^n leżącego w E^n na zbiór leżący w E^n (symbol „int” oznacza wewnątrz względem E^n). Pokażemy teraz, że prawdziwa jest równość.

Pokażemy więcej: *Jeśli A jest podzbiorem zwartym przestrzeni E^n i h jest homeomorfizmem zbioru A na podzbiór przestrzeni E^n , to $h(\text{int } A) = \text{int } h(A)$.* Wyniknie już stąd bezpośrednio, że h odwzorowuje brzeg zbioru A na brzeg zbioru $h(A)$; w szczególności, $h(A)$ jest rzadkie, jeśli A jest rzadkie.

Dowód inkluzji $h(\text{int } A) \subset \text{int } h(A)$ jest prostym przeniesieniem dowodu z przypadku $A = \Delta^n$.

Dla dowodu inkluzji przeciwnej weźmy w zbiorze A punkt p taki, że $h(p) \in \text{int } h(A)$. Istnieje sympleks n -wymiarowy zawarty w $h(A)$ taki, że $h(p) \in \text{int } \Delta$. Na mocy twierdzenia o zachowaniu otwartości punkt $h(p)$ (wartość w punkcie p homeomorfizmu h^{-1}) leży w $\text{int } h^{-1}(\Delta)$, a więc w $\text{int } A$.

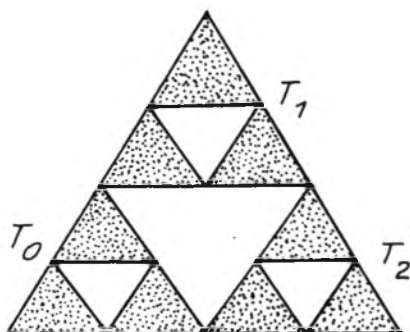
4. Mniej oczywiste są zastosowania twierdzenia o zachowaniu otwartości w teorii uniformizacji funkcji analitycznych, które były dla Brouwera motywacją do poszukiwania dowodu (por. książkę G. M. Gołuzina, *Gieometriezskaja tieoria funkcii kompleksnogo pieriemennogo*, Moskwa—Leningrad, 1952, na s. 258, V, T § 6, Teorema 2). Wśród swych twierdzeń o przestrzeniach euklidesowych twierdzenie o zachowaniu otwartości Brouwer uważał za najważniejsze.

* * *

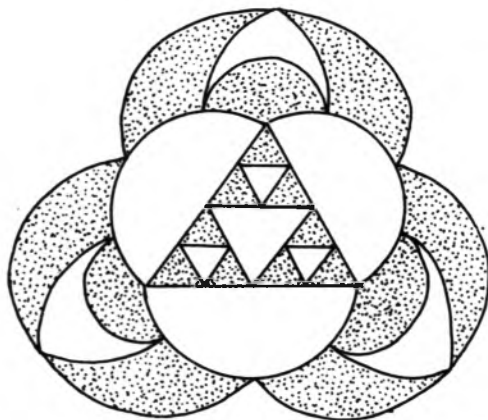
Przestrzenie E^n nie są jedynymi, dla których prawdziwe jest twierdzenie o zachowaniu otwartości. Pomińmy przestrzenie skończone i (ogólniej) dyskretne. Są przykłady tego rodzaju przestrzeni także wśród kontynuów o znacznym stopniu niejednorodności.

Krzywa trójkątowa Sierpińskiego – przypomniana na rys. 69 i przez zamieszczony tam opis⁽²²⁾ — ma własność zachowania otwartości z tym zastrzeżeniem, że obrazy homeomorficzne tych jej podzbiorów otwartych, które są otoczeniami wierzchołków trójkąta, w który jest wbudowana, mogą nie być jej podzbiórami otwartymi. Jeśli jednak dwie krzywe trójkątowe Sierpińskiego zszyje się ze sobą wierzchołkami, jak na rys. 70, to powstanie krzywa mająca własność zachowania otwartości już bez tego zastrzeżenia.

Wskazówka dla dowodu. Jedynymi zanurzeniami krzywej trójkątowej Sierpińskiego w siebie są homotetie na jej podtrójkąty (por. praca W. Dębskiego i autora⁽²³⁾).

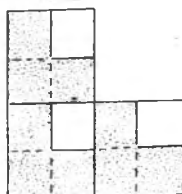


Rys. 69. Trójkąt równoboczny dzielimy na cztery przystające trójkąty, usuwając wewnątrz środkowego. Pozostają trójkąty T_0 , T_1 i T_2 , z którymi postępujemy tak samo. Kontynuując ten proces „usuwania środkowego trójkąta”, dostajemy krzywą trójkątową Sierpińskiego



Rys. 70. Krzywa trójkątowa Sierpińskiego zszyta wierzchołkami A , B i C z drugą tego rodzaju krzywą

(22) Jeden z dwu opisów tej krzywej pochodzących z pracy Sierpińskiego (1916) polega na kontynuowaniu procedury usuwania jednego — na przykład prawego górnego — spośród czterech kwadratów powstałych przy rozcięciu kwadratu na cztery równe części. W. Sierpiński *O krzywej, której każdy punkt jest punktem rozgałęzienia*, *Prace Matematyczno-Fizyczne* 27 (1916), 77—86; w *Oeuvres choisies*, t. II, na s. 99—106.



(23) W. Dębski, J. Mioduszeowski, *Simple plane images of the Sierpiński triangular curve are nowhere dense*, *Colloquium Mathematicum* 59 (1990), 125—140.

Kilka innych przykładów przestrzeni metrycznych zwartych nie będących rozmaitościami i mających właściwość zachowania otwartości można znaleźć w pracy E. Dudy⁽²⁴⁾.

Znane są wzmocnienia twierdzenia o zachowaniu otwartości na odwzorowania podzbiorów otwartych przestrzeni euklidesowych niekoniecznie wzajemnie jednoznaczne; Sitnikow⁽²⁵⁾ przeniósł twierdzenie na odwzorowania zanikające ku brzegowi obszaru. O klasycznym przypadku funkcji analitycznych jest mowa nieco dalej.

* * *

Twierdzenie o zachowaniu otwartości pozwala wyjaśnić problem, który pojawił się w związku z lematem Spenera: czy lemat Spenera pozostanie prawdziwy dla dowolnych podziałów symplecjalnych (niekoniecznie barycentrycznych) sympleksu? Aby uzyskać odpowiedź twierdzącą, wystarczyłoby wiedzieć, że każdy sympleks $(n-1)$ -wymiarowy z podziału sympleksu Δ^n jest wspólną ścianą dokładnie dwóch sympleksów n -wymiarowych podziału, jeśli leży we wnętrzu sympleksu Δ^n , a ścianą dokładnie jednego, jeśli leży na brzegu; w podziałach barycentrycznych tę własność uzyskaliśmy z rachunku analitycznego.

Trudność tkwi w budowie logicznej pojęcia podziału symplecjalnego. Zaczniemy od tego, że żadnej trudności nie byłoby, jeśliby podział symplecjalny sympleksu mógł być rozumiany jako pewnego rodzaju „porozcinanie” sympleksu. Twierdzenie — odpowiednik aksjomatu Pascha — orzekające, że hiperpłaszczyzna $(n-1)$ -wymiarowa rozcina E^n na dwa obszary wypukłe i jest ich wspólnym brzegiem, wystarczyłoby dla dowodu brakującej przesłanki.

Tymczasem pojęcie podziału symplecjalnego polega na określeniu każdego sympleksu podziału z osobna, a następnie na lokowaniu tych sympleksów w odpowiedniej przestrzeni (w danym przypadku jest to sympleks Δ^n) z zachowaniem przepisanych dla danego podziału incydencji (ilustrują to dowody twierdzeń o realizacji). Jeśli te incydencje nie są *explicite* wypisane, brak bezpośredniego sposobu na rozstrzygnięcie pytania o to, dla ilu sympleksów podziału dany sympleks jest ścianą.

Twierdzenie o zachowaniu otwartości pozwala pokonać tę trudność.

Traktujmy podział jako triangulację T , której bryłą jest sympleks Δ^n . Niech $h: \Delta^n \rightarrow E^n$ będzie zanurzeniem (np. danym przez inkluzję $\Delta^n \subset E^n$).

Niech s będzie sympleksem $(n-1)$ -wymiarowym triangulacji T .

Sympleks s jest ścianą co najmniej jednego sympleksu n -wymiarowego kompleksu T . Dla dowodu zauważmy, że obraz sympleksu przy zanurzeniu w E^n ma w E^n puste wnętrze, co wynika z właściwości zachowania wymiaru przy przejściu do obrazu homeomorficznego. Jeśli więc s nie było ścianą żadnego sympleksu n -wymiarowego triangulacji T , to w otoczeniach obrazów punktów geometrycznie wewnętrznych sympleksu s nie byłoby punktów

⁽²⁴⁾ E. Duda, *Brouwer property spaces*, Duke Mathematical Journal 30 (1963), 647—660.

⁽²⁵⁾ K. A. Sitnikow, *O nieprerywnych otobrazenijach odkrytych mnożestw ewklidowo prostranstwa*. Matematičeskij Sbornik 31 (1952), 439—458.

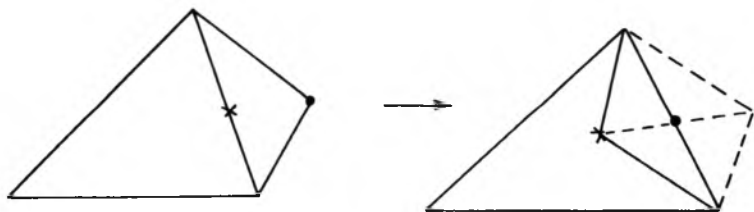
z wnętrza $h(\Delta^n)$, co jest niemożliwe, bo wewnątrz $h(\Delta^n)$ jest, na mocy twierdzenia 2, gęste w $h(\Delta^n)$.

Niech t będzie sympleksem n -wymiarowym triangulacji T takim, że s jest ścianą sympleksu t . Na mocy twierdzenia o zachowaniu otwartości (tym samym zachowaniem brzegu) obrazy punktów ściany s znajdą się po zanurzeniu w E^n na brzegu topologicznym zbioru $h(t)$.

Jeśli s jest ścianą tylko jednego sympleksu n -wymiarowego t triangulacji T , to s leży na brzegu sympleksu Δ^n , ponieważ punkty wewnętrzne (geometrycznie) ściany s , nie będąc punktami żadnego poza t sympleksu n -wymiarowego triangulacji T , przejdą po zanurzeniu w E^n w punkty, które w pewnych swych otoczeniach w E^n nie będą zawierały punktów obrazów innych sympleksów n -wymiarowych niż t . Ponieważ obraz sympleksu t nie wypełnia całości otoczenia (co wykazano w poprzedniej przesłance), obrazy punktów ściany s leżą na brzegu $h(\Delta^n)$, a stąd, na mocy twierdzenia o zachowaniu otwartości (punktów brzegowych), punkty ściany s leżą na brzegu sympleksu Δ^n .

Jeśli s jest ścianą dwu sympleksów n -wymiarowych t i t' kompleksu T , to punkty (geometrycznie) wewnętrzne ściany s leżą we wnętrzu (geometrycznym) sympleksu Δ^n . Aby to zobaczyć, weźmy pod uwagę sumę $t \cup t'$ wspomnianych dwu sympleksów. Ta suma jest homeomorficzna z sympleksem n -wymiarowym poprzez homeomorfizm lokujący ich wspólną ścianę s (pomijając punkty jej brzegu geometrycznego) we wnętrzu sympleksu.

Odpowiedni homeomorfizm jest wskazany na rys. 71.



Rys. 71. Homeomorfizm polega na „wgnieceniu” jednego sympleksu w drugi poprzez wspólną ścianę. Z podobnego rodzaju homeomorfizmem spotkaliśmy się przy okazji dowodu wielokątowego twierdzenia Schoenfliesa w końcu wykładu 1

Po zanurzeniu w E^n obrazy punktów ściany s nie leżących na jej brzegu geometrycznym znajdą się, na mocy twierdzenia o zachowaniu otwartości, we wnętrzu topologicznym zbioru $h(\Delta^n)$. Stąd, stosując jeszcze raz to twierdzenie (dla homeomorfizmu odwrotnego), same te punkty muszą się znaleźć we wnętrzu geometrycznym sympleksu Δ^n .

Są co najwyżej dwa sympleksy n -wymiarowe triangulacji T mające s jako ścianę. Jeśli by t'' był jeszcze jednym takim sympleksem, to po zanurzeniu sumy $t \cup t'$ w E^n (po wcześniejszym przekształceniu jej na sympleks, tak jak na rys. 71) sympleks t'' musiałby się w E^n zanurzyć tak, że obraz jego wnętrza przecinałby się z obrazem wnętrza co najmniej jednego z sympleksów t i t'

(twierdzenie o zachowaniu otwartości), to zaś jest niemożliwe, bo w kompleksie T wnętrza geometryczne sympleksów n -wymiarowych są rozłączne.

* * *

Znaczenie zachowania otwartości uwidacznia się w dowodzie — jednym z pochodzących od Gaussa — zasadniczego twierdzenia algebry.

Niech $W(z)$ będzie wielomianem: istnieje z takie, że $W(z) = 0$, jeśli $W(z)$ nie redukuje się do stałej.

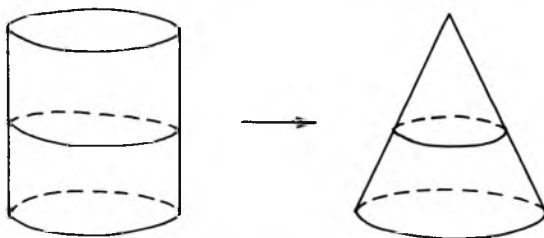
Przypuśćmy, że jest stałe $W(z) \neq 0$. Biorąc pod uwagę to, że $|W(z)| \rightarrow \infty$ przy $z \rightarrow \infty$. Jeśli $W(z)$ nie jest stałe, rozumowania wykorzystujące ciągłość wielomianu i zwartość podzbiorów domkniętych ograniczonych płaszczyzny prowadzą do wniosku, że w pewnym punkcie z_0 moduł wielomianu W przyjmuje minimum dodatnie m , $|W(z_0)| = m > 0$, $|W(z)| \geq m$ dla wszelkich z .

Dowód daje się zakończyć — dojściem do sprzeczności — dzięki ogólnej własności funkcji analitycznych (tu wystarczy ją znać dla wielomianów), według której przekształcają one zbiory otwarte na zbiory otwarte; w istocie, wystarczy konsekwencja tej własności, a mianowicie to, że minimum modułu może być przyjęte jedynie na brzegu dziedziny funkcji⁽²⁶⁾.

* * *

Jedynymi kontinuumi leżącymi na okręgu są punkty, łuki i całość okręgu. Można z nich utworzyć przestrzeń, przyjmując za odległość liczbę mierzącą, o ile jedno kontinuum wystaje poza drugie: ich różnica ma dwie składowe, jedną lub wcale, i większa z ich długości stanowi wspomnianą odległość⁽²⁷⁾.

Łuk leżący na okręgu S^1 charakteryzuje się dwoma parametrami: jego środkiem x i długością kątową α łuku, $\alpha \in S^1$, $0 \leq \alpha < 2\pi$.



Rys. 72. Walec przechodzi na stożek po identyfikacji $S^1 \times \{2\pi\}$ do punktu

⁽²⁶⁾ Dowód tego, że odwzorowania dane funkcjami analitycznymi zachowują otwartość zbiorów przy przejściu do obrazu, można znaleźć w książce S. Stoilowa, *Teoriya funktsii kompleksnogo pieriennnogo* (tłum. z jęz. rumuńskiego), Moskwa 1962, t. I, s. 68 oraz u tegoż autora w *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques* (Paris, 1956, s. 132; wyd. ros., Moskwa 1964). Dowód zasadniczego twierdzenia algebry z lematem Gaussa jest w *Zasadach algebry* wyższej W. Sierpińskiego, Warszawa—Wrocław 1946, s. 98—101.

⁽²⁷⁾ Ogólniej: przez odległość Hausdorffa podzbiorów A i B podzbiorów domkniętych ograniczonych przestrzeni metrycznej rozumie się liczbę

$$\max\{\sup\{d(x, A) : x \in B\}, \sup\{d(x, B) : x \in A\}\},$$

gdzie d jest symbolem dla odległości punktu od zbioru.

Te łuki razem są w odpowiedności wzajemnie jednoznacznej $S^1 \times [0, 2\pi)$.

Dołączając punkt reprezentujący całość okręgu, dostajemy kompaktyfikację walca $S^1 \times [0, 2\pi)$, tj. stożek o podstawie S^1 . Określona przez podany opis odpowiedność wzajemnie jednoznaczna między podkontinuumi okręgu i punktami stożka jest homeomorfizmem.

Twierdzenie. *Nie można wybrać z każdego kontinuum położonego na okręgu po jednym punkcie tak, by wybór był ciągły.*

Dowód. Wybór ciągły byłby równoznaczny z odwzorowaniem stożka w jego podstawę S^1 tożsamościowym na tej podstawie (stożek nad okręgiem jest topologicznie krążkiem).

* * *

Punkt x jest nazywany *punktem stałym* odwzorowania $f: X \rightarrow X$, jeśli $f(x) = x$.

Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym (1911)⁽²⁸⁾. *Jeśli f jest odwzorowaniem ciągłym sympleksu Δ^n w siebie, to $f(x) = x$ dla pewnego x .*

Dowód. Dla każdego i weźmy pod uwagę zbiory $U_i = \{x \in \Delta^n : \lambda_i(f(x)) < \lambda_i(x)\}$. Łatwo widzieć, że $a_i \in U_i \subset gw_{\Delta^n} a_i$.

Przypuśćmy, że $f(x) \neq x$ dla każdego x . Wtedy zbiory U_0, \dots, U_n pokrywają sympleks Δ^n . Wobec twierdzenia 3 istnieje x takie, $x \in U_0 \cap \dots \cap U_n$, a więc takie, że $\lambda_i(f(x)) < \lambda_i(x)$ dla każdego i . Stąd suma współrzędnych barycentrycznych punktu $f(x)$ jest mniejsza niż 1; sprzeczność, bo $f(x) \in \Delta^n$.

Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym jest jednym z bardziej znanych w topologii, chociaż w tych wykładach, których celem są między innymi twierdzenia o rozcinaniu przestrzeni euklidesowych, pozostanie nieco na uboczu.

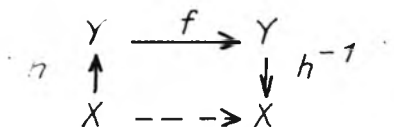
Podany tu dowód, oparty na twierdzeniu Spernera o zamocowaniu, pochodzi od K. Knastera, K. Kuratowskiego i S. Mazurkiewicza (1929).

Mówi się, że przestrzeń *ma własność punktu stałego*, jeśli każde odwzorowanie ciągłe tej przestrzeni w siebie ma punkty stałe.

Jeśli przestrzeń ma własność punktu stałego, to mają tę własność przestrzenie z nią homeomorficzne.

⁽²⁸⁾ L. E. J. Brouwer, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, 71 (1911), 97—115; w *Collected Works*, t. II, na s. 454—474, Satz 4. Twierdzenie o punkcie stałym dla kuli było w tej pracy Brouwera dalekim wnioskiem z twierdzeń dużo ogólniejszych, dotyczących stopnia odwzorowania sfer. Znane było wcześniej Bohlowi (praca cytowana w przypisie (1)), ale Brouwer o tym nie wiedział. Na możliwość wyprowadzenia twierdzenia Brouwera o punkcie stałym z twierdzenia Spernera o zamocowaniu zwrócili uwagę B. Knaster, K. Kuratowski i S. Mazurkiewicz w pracy *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n -dimensionale Simplexe*, Fundamenta Mathematicae 14 (1929), 132—137.

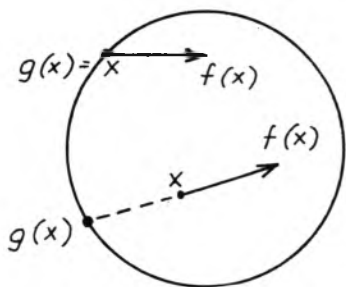
Istotnie, niech X będzie przestrzenią mającą własność punktu stałego, niech h będzie homeomorfizmem tej przestrzeni na przestrzeń Y i niech f będzie odwzorowaniem ciągłym przestrzeni Y w siebie. Odwzorowanie $h^{-1} \circ f \circ h$ (por. diagram) jest odwzorowaniem przestrzeni X w siebie. Niech x będzie punktem stałym tego odwzorowania. Punkt $h(x)$ jest punktem stałym odwzorowania f .



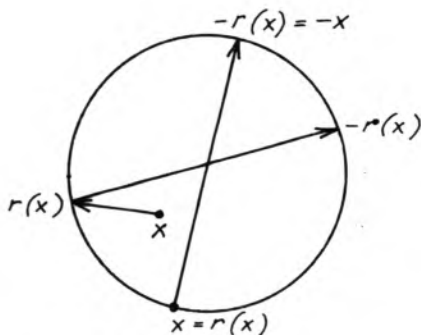
Sympleks Δ^n jest homeomorficzny z kulą $Q^n = \{x \in E^n : |x| \leq 1\}$. Stąd, twierdzenie Brouwera o punkcie stałym jest prawdziwe także dla kul euklidesowych.

Korzystając z pewnych własności geometrycznych kuli, między innymi z tej, że półprosta wychodząca z wnętrza $Q^n - \partial Q^n$ kuli przecina jej brzeg ∂Q^n dokładnie w jednym punkcie, można wykazać równoważność twierdzenia o punkcie stałym z twierdzeniem o nieistnieniu retrakcji na brzeg.

Szkic dowodu. 1. Niech $f: Q^n \rightarrow Q^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że $f(x) \neq x$ dla każdego x . Wektor x , $f(x)$ przedłużmy wstecz do punktu przecięcia z ∂Q^n ; oznaczmy ten punkt przecięcia przez $g(x)$. Odwzorowanie $g: Q^n \rightarrow \partial Q^n$ jest ciągłe i jest tożsamością na brzegu. Sprzeczność.



Rys. 73. Dowód 1



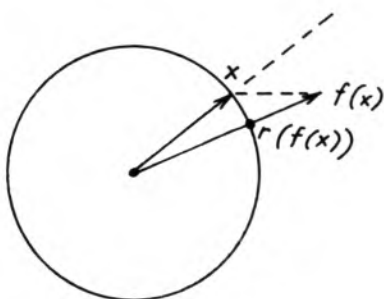
Rys. 74. Dowód 2

2. Jeśli istnieje retrakcja $r: Q^n \rightarrow Q^n$, to przyporządkowanie $x \rightarrow r(x) \rightarrow -r(x)$ określa odwzorowanie ciągłe kuli w siebie nie mające punktów stałych; przez $-a$ jest oznaczona antypoda punktu a .

W twierdzeniu Brouwera o punkcie stałym — trzymamy się wersji z kulą Q^n — nie musi się zakładać, że wszystkie wartości odwzorowania leżą w Q^n , chociaż pewne ograniczenia są konieczne.

Twierdzenie. (Bohl, 1904⁽²⁹⁾). Jeśli f jest odwzorowaniem ciągłym kuli Q^n w E^n takim, że

(20) dla punktów x sfery S^{n-1} i $\lambda > 0$ jest zawsze $f(x) - x \neq \lambda x$ (wartości $f(x)$ nie leżą na przedłużeniu wektora x , jeśli $x \in S^{n-1}$), to $f(x) = x$ dla pewnego x .



Rys. 75. Twierdzenie Bohla

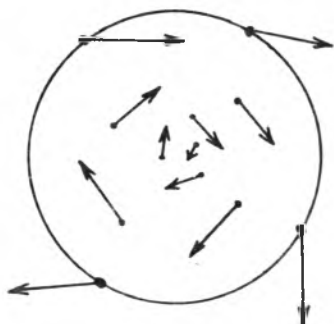
W szczególności, jeśli f jest odwzorowaniem ciągłym kuli Q^n w E^n , przekształcającym brzeg S^{n-1} kuli Q^n w Q^n , to $f(x) = x$ dla pewnego x leżącego w Q^n .

D o w ó d. Niech r będzie retrakcją E^n na Q^n daną wzorem $r(x) = x/|x|$ dla x spoza Q^n (przyjmujemy, że Q^n jest kulą jednostkową $|x| = 1$). Odwzorowanie $r \circ f$ jest odwzorowaniem ciągłym Q^n w Q^n . Niech x będzie punktem stałym, $r(f(x)) = x$, istniejącym na mocy twierdzenia Brouwera. Warunek (20) implikuje należenie $f(x)$ do Q^n , ale r jest tożsamością na Q^n , więc stąd $r(f(x)) = f(x)$, a w rezultacie $f(x) = x$.

U w a g a. Różnica $f(x) - x$ interpretuje się geometrycznie jako wektor zaczepiony w x łączący punkty x i $f(x)$. Razem więc różnice $g(x) = f(x) - x$ określają Q^n pole wektorów, ciągłe.

Twierdzenie Bohla orzeka, że pole ciągle wektorów na Q^n zeruje się w pewnym punkcie kuli Q^n , chyba że na S^{n-1} któryś z wektorów $g(x)$ tego pola ma kierunek wektora x .

Jeśli analogiczną interpretację zastosuje się do twierdzenia Brouwera, to orzeka ono, że pole ciągle wektorów na Q^n , nie mające na S^{n-1} wektorów skierowanych na zewnątrz Q^n , zeruje się w pewnym punkcie kuli.



Rys. 76. Niezaczesywalność kuli

Nie zerujące się pole ciągle wektorów jest nazywane *zacziesaniem*. Twierdzenie Bohla głosi, że kula euklidesowa nie ma *zacziesania*, chyba że dozwolimy, by w pewnym punkcie na jej sferze wektor pola miał kierunek normalnej skierowanej na zewnątrz.

Nie należy tego twierdzenia jednak mylić ze znacznie trudniejszym twierdzeniem o niezaczesywalności sfer wymiaru parzystego⁽³⁰⁾.

⁽²⁹⁾ Praca cytowana w przypisie (1). Twierdzenie zawiera w sobie twierdzenie Brouwera. Mimo to twierdzenia o punkcie stałym dla kuli nie przestajemy nazywać twierdzeniem Brouwera.

⁽³⁰⁾ Twierdzenie z pracy Brouwera cytowanej w przypisie (1). Dowód wykracza poza metody stosowane w tych wykładach.

U w a g a. W dowodzie pojawiła się retrakcja $E^n \rightarrow Q^n$ przeprowadzająca punkty spoza Q^n w S^{n-1} . Istnienie tego rodzaju retrakcji E^n na obraz homeomorficzny kuli Q^n leżący w E^n nie jest oczywiste (por. R. H. Bing, *Retractions onto spheres*, Amer. Math. Monthly 71 (1964), 481—484; Coll. Papers I, 145—148).

* * *

Stosując twierdzenie Spernera o zamocowaniu, można uzyskać twierdzenia o punktach stałych dla podzbiorów zwartych wypukłych przestrzeni liniowych, niekoniecznie wymiaru skończonego: twierdzenie Schaudera i Tichonowa; por. cytowaną w przypisach książkę Dugundiego i Granas (s. 57 i 74; oraz książkę A. B. Charaizszwili *Wwiedienije w kombinatornuju geometriju*, Tbilisi 1985, s. 69), z przykładem zastosowania do równań różniczkowych na s. 153.

Twierdzenie (Kuratowski-Steinhaus 1953, *Une application...*). *Jeśli $f: Q^n \rightarrow Q^n$ jest odwzorowaniem ciągłym kuli euklidesowej n -wymiarowej w siebie takim, że dla punktów x brzegu S^{n-1} tej kuli jest zawsze*

$$(21) \quad f(x) \in S^{n-1}$$

i

$$(22) \quad f(x) \neq x,$$

to $f(Q^n) = Q^n$.

D o w ó d. Jeśliby $Q^n - f(Q^n) \neq \emptyset$, to biorąc punkt p w $Q^n - f(Q^n)$ i retrakcję $r: Q^n - \{p\} \rightarrow S^{n-1}$, dostalibyśmy odwzorowanie ciągle $r \circ f: Q^n \rightarrow Q^n$. Na mocy twierdzenia Brouwera o punkcie stałym jest $r(f(x)) = x$ dla pewnego x z kuli Q^n . Ale zbiór wartości odwzorowania $r \circ f$ leży w S^{n-1} , więc $x \in S^{n-1}$, skąd wobec (21), $f(x) \in S^{n-1}$. Stąd $x = r(f(x)) = f(x)$, wbrew (22).

Wniosek. *Jeśli f jest odwzorowaniem ciągłym Q^n w Q^n takim, że dla x leżących na S^{n-1} jest zawsze*

$$f(x) = -x,$$

to $f(Q^n) = Q^n$.

Inaczej, odwzorowanie ciągle kuli będące na brzegu antypodyzmem jest odwzorowaniem „na”. W szczególności, niemożliwe jest odwzorowanie ciągle Q^n w Q^{n-1} będące na brzegu antypodyzmem.

Przypomnijmy, że to samo jest prawdą, jeśli zastąpić antypodyzm tożsamością. Wspólne uogólnienie obu twierdzeń będzie dowiedzione dalej w wykładzie 5.

Stwierdzenie zawarte w ostatnim wniosku zawiera w sobie twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego w przypadku $f(a_0) = a_1$ i $f(a_1) = a_0$ — zmiana orientacji odcinka. Twierdzenie 1 i ostatni wniosek dają więc razem w wymiarze 1 wszystko to, co daje twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego.

Problemy w wyższych wymiarach jednak pozostają: co wystarczy założyć o zachowaniu się na brzegu odwzorowania ciągłego kuli w siebie, by odwzorowanie musiało okazać się „na”? Pewna ogólna odpowiedź znajdzie się w wykładzie 5; jej szczegółowsza treść — dla wymiaru $n = 2$ — w wykładzie 9.

* * *

Nie wszystkie przestrzenie mają własności punktu stałego. Nie mają jej przestrzenie euklidesowe, które wystarczy przesunąć po sobie, aby wszystkie punkty zmieniły położenie. Nie mają jej sfery. Antypodyzm, przeprowadzający punkty sfery na przeciwległe, jest jednym z przykładów. Nietrudne dowody następnych kilku twierdzeń są pozostawione bez dowodów.

Jeśli⁽³¹⁾ przestrzeń jest sumą dwu podprzestrzeni domkniętych przecinających się w jednym punkcie i każda z tych podprzestrzeni ma własność punktu stałego, to ma ją również przestrzeń.

Wynika stąd między innymi, że triody i (przez indukcję) wszelkie dendryty skończone (tj. grafy bez wieloboków zamkniętych) mają własność punktu stałego, co może być punktem wyjścia dla dowodu, że wszelkie dendryty (tj. kontinua metryczne lokalnie spójne nie zawierające krzywych zwykłych zamkniętych) mają własność punktu stałego.

Jeśli $f: X \rightarrow X$ jest odwzorowaniem ciągłym przestrzeni metrycznej zwartej takim, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje x takie, że odległość $f(x)$ od x nie przekracza ε , to f ma punkty stałe.

Kontinuum jest nazywane węzowym — podobnym do odcinka⁽³²⁾ — jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje odwzorowanie tego kontinuum na odcinek, nie identyfikujące punktów będących w odległości większej niż ε .

Kontinua węzowe mają własność punktu stałego⁽³³⁾.

Jeśli przestrzeń zwarta metryczna ma dla każdego $\varepsilon > 0$ retrakcję na podprzestrzeń z własnością punktu stałego i ta retrakcja nie zmienia położenia punktów więcej niż o ε , to przestrzeń ma własność punktu stałego.

Retrakcja kostki Hilberta na kostkę euklidesową I^n dana wzorem $r(\{x_1, x_2, \dots\}) = \{x_1, \dots, x_n, 0, \dots\}$ nie zmienia położenia punktów więcej niż o $1/(n+1)$. Ponieważ kostki euklidesowe mają własność punktu stałego, więc z ostatniego twierdzenia wynika, że kostka Hilberta ma własność punktu stałego.

⁽³¹⁾ To twierdzenie można znaleźć w pracy K. Borsuka, *Einige Sätze über stetige Streckenbilder*, *Fundamenta Mathematicae*, 18 (1932), 198—213.

⁽³²⁾ Ten rodzaj kontinuu był wyodrębniony przez Z. Waraszkiewicz, *O pokrewieństwie kontinuu*, *Wiadomości Matematyczne* 48(1936), 1—57.

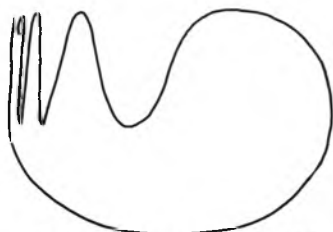
⁽³³⁾ O. H. Hamilton, *A fixed point theorem for pseudo-arc and certain other metric continua*, *Proceedings of the AMS* 2 (1951), 173—174; inny dowód por. wykład 5.

Retrakt przestrzeni mającej własność punktu stałego ma własność punktu stałego (oczywiste).

Retrakty absolutne (w zakresie przestrzeni zwartych metrycznych) — nazywane także *AR-ami* — są reaktami kostki Hilberta (por. uwaga w *Aneksie*, s. 68). Stąd *własność punktu stałego dla AR-ów*.

Na tym kończy się lista prostych prawidłowości, którym podlegają przestrzenie mające własność punktu stałego. Ogólnie własność ta wymyka się systematycznym badaniom, na przykład nie przenosi się na produkty⁽³⁴⁾. Nie wiadomo dotąd, czy kontinua płaskie nie rozcinające płaszczyzny mają własność punktu stałego. Polecamy artykuł Binga⁽³⁵⁾, w którym na wielu przykładach są pokazane trudności w uchwyceniu całości problemu.

Niespodzianką może być na przykład to, że tzw. *okrąg warszawski* (por. rys. 77) ma własność punktu stałego⁽³⁶⁾ mimo jego pokrewieństwa z okręgiem (dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ε — odwzorowanie okręgu warszawskiego na okrąg).



Rys. 77. Okrąg warszawski

Inną niespodzianką może być także to, że w stwierdzeniu wypowiedzianym wyżej założenie o jednopunktowości przekroju nie może być zastąpione założeniem, że przekrój ma własność punktu stałego, a nawet, że jest odcinkiem: Bing; inne szczegóły na ten temat por. Mańka⁽³⁷⁾.

Twierdzenia o punktach stałych przyciągają uwagę między innymi wieloma anegdotycznymi interpretacjami, ale istotniejsze dla tych zainteresowań jest to, że wielu twierdzeniom o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych całkowych, funkcyjnych itp. można nadać formę twierdzeń o punktach stałych, a twierdzenie Brouwera jest często podstawowym elementem w dowodach tego rodzaju twierdzeń, na przykład w dowodzie twierdzenia Schaudera (patrz książka Dugundjiego i Granasa, *Fixed point theory*, Warszawa 1982, s. 57).

Dowód twierdzenia Brouwera o punkcie stałym jest prosty tylko w wymiarze 1 dla odcinka (wymaga jedynie pokazania, że wykres funkcji ciągłej przecina przekątną).

⁽³⁴⁾ E. H. Connel, *Properties of fixed point spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society 10 (1959), 974—975; por. również książkę T. van der Walta, *Fixed points and almost fixed points* (s. 84). Własność punktu stałego nie zachowuje się nawet przy produktowaniu przestrzeni metrycznej zwartej przez odcinek; por. Ronald Knill, *Cones, products and fixed points*, Fundamenta Mathematicae 60 (1967), 35—46.

⁽³⁵⁾ R. H. Bing, *The elusive fixed point property*, The American Mathematical Monthly 76 (1969), 119—131; w *Collected Papers Binga*, t. I, s. 505—518.

⁽³⁶⁾ R. H. Bing, *The elusive...*

⁽³⁷⁾ R. H. Bing, *The elusive...*; R. Mańka, *On the additivity of the fixed point property for 1-dimensional continua* (preprint).

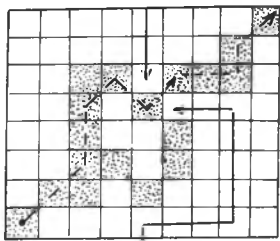
Począwszy od wymiaru 2 dowody są już istotnie trudniejsze, dlatego dobrze jest wiedzieć o poglądowych dowodach w przypadku kwadratu. Jeden z tego rodzaju dowodów można znaleźć w książce *The geometric topology of 3-manifolds* R. H. Binga (1983) na s. 97. O innym, sprowadzającym się do pewnego zadania o szachownicy (które można znaleźć w *Kalejdoskopie matematycznym* H. Steinhausa na s. 32, wyd. z 1956 r., oraz u tegoż autora w *Zadaczach i rozmyśleniach*, Moskwa 1974, s. 103, zadanie 97, z komentarzem na s. 211, autor wie od Profesora Steinhausa⁽³⁸⁾). Ten sam pomysł, ale z szachownicą heksagonalną, jest podstawą dowodu — przeniesionego już na wyższe wymiary — w artykule Davida Gale'a, *The game of Hex and the Brouwer fixed point theorem*, (*American Mathematical Monthly* 86 (1979), 818—827).

U podstaw każdego ze znanych dowodów twierdzenia o punkcie stałym dla kul (twierdzenia o nieistnieniu retrakcji itp.) leży zawsze jakiś lemat kombinatoryczny; w tych wykładach był to lemat Spernera. Ale może nim być na przykład kostkowa wersja lematu Spernera, jak w pracy H. W. Kuhna (1960)⁽³⁹⁾; por. książkę T. Riedricha, *Vorlesungen über nichtlineare Operatorgleichungen*, Leipzig 1976 (s. 56—59). Pewien — jak się zdaje inny — lemat leży u podstaw dowodu zamieszczonego w książce A. Leika, *Zbiory* (1964), na s. 159—164.

⁽³⁸⁾ Według słów Profesora Steinhausa dowód pochodził od jednego z matematyków lwowskich. Z książki Aliny z Chwistków Dawidowiczowej, *Zeschnięte liście i kwiat*, *Wspomnienia* (Kraków 1989), można wnioskować (s. 148), że od Włodzimierza Stożka.

Dowód podany w „Delfcie” z 1980 r., nr 9, jest niewystarczający.

Twierdzenie o szachownicy. Jeśli pola szachownicy prostokątnej pokryte są barwami białą i czarną, tak że pola w dowolnym lewym narożu i górnym prawym są czarne, a wieża nie ma drogi po białych polach łączącej pola na krawędzi szachownicy przedzielone wspomnianymi dwoma narożami, to król może przejść po czarnych polach od jednego do drugiego naroża.



Pełny dowód podał ostatnio W. Surówka, *A discrete form of Jordan curve theorem*, *Annales Mathematicae Silesianae* 7 (1993), 57—61.

⁽³⁹⁾ H. W. Kuhn, *Some combinatorial lemmas in topology*, *IBM Journal of res. and dev.* 4 (1960), 807—821.

Wszystkie twierdzenia topologii przestrzeni euklidesowych, które otrzymujemy za pomocą metod symplecjalnych, można uzyskać, zamiast sympleksów używając kostek. Analogon kostkowy lematu Spernera jest punktem wyjścia do uzyskiwania twierdzeń. Kostkowa wersja twierdzenia o zamocowaniu przyjmuje postać twierdzenia o przegródkach (między przeciwległymi ścianami kostki); por.: *Teoria wymiaru* Engelkinga (s. 64). Systematycznie kostkowo rozwija topologię przestrzeni euklidesowych (w wymiarze 2) M. H. A. Newman w książce cytowanej w wykładzie 2, w przypisie (1).

W książce Hurewicza i Wallmana⁽⁴⁰⁾ lemat kombinatoryczny się nie pojawia, jest za to rozumowanie kombinatoryczne motywujące wprowadzenie pojęcia stopnia odwzorowania. O twierdzeniu Brouwera w wymiarze 2 pisze również L. A. Lusternik w książce *Wypukłyje figury i mnogogranniki*. Wiele szczegółów można znaleźć w książce J. A. Szaszkin *Niepodwiniye toczki*⁽⁴¹⁾.

Kluczem do dowodów głównych twierdzeń tego wykładu był lemat Spernera. Aby pójść krok dalej i otrzymać twierdzenie, takie jak o niezachowalności sfer parzystowymiarowych, trzeba użyć mocniejszego środka kombinatorycznego, uwzględniającego zmianę orientacji sympleksów przy odwzorowaniach symplecjalnych. Lemat Spernera ma wzmocnienie tego rodzaju, według którego ilość sympleksów z pełną numeracją, mających orientację dodatnią, różni się o 1 od ilości sympleksów z pełną numeracją, mających orientację ujemną⁽⁴²⁾. Brouwer nie wyodrębniał żadnego lematu kombinatorycznego, dzięki czemu — z naszego punktu widzenia — jego dowody były mniej przejrzyste. Dla aproksymacji symplecjalnych odwzorowań ciągłych, które rozważał, liczył objętości obrazów sympleksów, uwzględniając znak wyznacznika odwzorowania liniowego, za którego pomocą ten sympleks został uzyskany. Uwzględniał w ten sposób orientację.

Wprowadzenie orientacji to nowy szczebel trudności. Okazało się wszakże (Sperner), że całą serię twierdzeń można uzyskać, pomijając pojęcie orientacji, którego się w tych wykładach nie wprowadza. Stanowi to jednocześnie barierę do uzyskiwania twierdzeń.

W wymiarze 2 metody związane z orientacją zastępuje metoda pętli i dróg (grupa podstawowa), która pozwala na uzyskanie twierdzeń o kanapce, antypodach, pokryciach sfer i innych w wymiarze 2.

Lemat Tuckera — odpowiednik lematu Spernera dla środkowo symetrycznych podziałów sfer — jest kluczem do dowodu tych ostatnio wspomnianych twierdzeń w dowolnych wymiarach. Będzie im poświęcony osobny wykład.

Przegląd metod kombinatorycznych w topologii przestrzeni euklidesowych można znaleźć w artykule Hadwiger (1960)⁽⁴³⁾.

Lemat Spernera uwzględniający orientację wydaje się środkiem silniejszym niż lemat Tuckera, a równoważny tym środkom wyznacznikowym, które są znane z prac Brouwera. Lemat ten jest konsekwencją pewnego twierdzenia o zachowaniu objętości; por. Dębski⁽⁴⁴⁾.

⁽⁴⁰⁾ Witold Hurewicz, Henry Wallman, *Dimension Theory*, Princeton 1941; s. 37.

⁽⁴¹⁾ L. A. Lusternik, *Wypukłyje figury i mnogogranniki*, Moskwa 1956, s. 196—207. Ju. A. Szaszkin, *Niepodwiniye toczki*, Moskwa 1989.

⁽⁴²⁾ A. B. Brown, S. S. Cairns, *Strengthening of Sperner's lemma to applied to homology theory*. Proceedings of the National Academy of Sciences USA 47 (1961), 113—114.

⁽⁴³⁾ H. Hadwiger, *Elementare Kombinatorik und Topologie*, Elemente der Mathematik 15 (1960), 50—60.

⁽⁴⁴⁾ W. Dębski, *Additivity of volume and the Sperner's lemma*, Colloquium Mathematicum 59 (1990), 117—123.

Teoria homologii — jedna z metod topologii algebraicznej — pozwala uzyskać — jeśli już jest zbudowana — twierdzenia kręgu twierdzeń Brouwera (także te, których nie ma w tych wykładach) stosunkowo prosto. Gubi się jednak przy tym zasady geometryczne, dzięki którym otrzymywanie tych twierdzeń jest możliwe. Nie wszystkie kursy teorii homologii wydobywają dostatecznie wyraźnie rolę pewnego lematu — będącego w istocie wariantem lematu Spernera uwzględniającego orientację — orzekającego istnienie lewej odwrotności dla operacji podziału barycentrycznego (ściśle określenie jest możliwe na gruncie pojęcia grupy łańcuchów i jej homomorfizmów), dzięki któremu teoria homologii może być zbudowana. Miejsce to wszakże wypunktowuje dokładnie S. Lefschetz w swoim *Introduction to topology* oraz — w swoich książkach — Mayer i Franz⁽⁴⁵⁾.

Publikacje poświęcone punktom stałym są następujące:

J. Dugundji, A. Granas, *Fixed point theory*, Monografie Matematyczne 61, Warszawa 1982.

D. R. Smart, *Fixed point theorems*, Cambridge Tracts in Mathematics 66, Cambridge 1974.

T. van der Walt, *Fixed and almost fixed points*, Mathematische Centrum, Amsterdam 1963 (wyd. trzecie: 1975).

⁽⁴⁵⁾ S. Lefschetz, *Introduction to topology*, Princeton 1949, s. 115—117; J. Mayer, *Algebraic topology*, Prentice Hall, New Jersey, 1972, s. 18—22; W. Franz, *Topologie, I i II*, Sammlung Götschen, Bd. 1181—1182, 1182a, Berlin 1965, s. 90.

WYKŁAD 4. Pojęcie wymiaru pokryciowego • Wymiar sympleksu Δ^n jest równy n • Odwzorowania w nerw pokrycia • Twierdzenie Menger-Nöbelinga o zanurzaniu w E^{2n+1} • Na temat teorii wymiaru

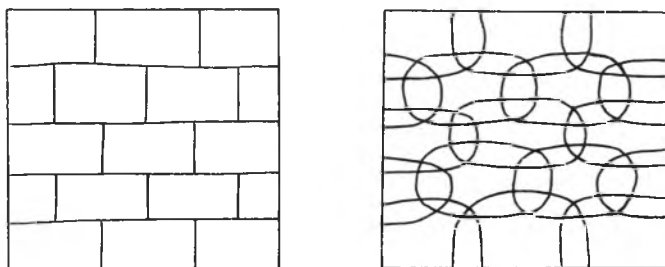
Sprawdzianem dla topologii jako dyscypliny geometrycznej było, dowiedzione przez Brouwera (1911), twierdzenie orzekające, że przestrzenie euklidesowe E^m i E^n (a także odpowiednie kostki) nie są homeomorficzne, jeśli $m \neq n$.

Dowiedliśmy tego w wykładzie 3, przytaczając oryginalny dowód Brouwera (s. 87), a następnie dowód pochodzący od Spernera (s. 14). Odkrycie Brouwera nie należało do tych faktów matematycznych, które, chociaż trudne, trzeba było jedynie potwierdzić, bo mogły być wątpliwości co do jego prawdziwości. Z prac Cantora (1878) było wiadomo, że przestrzenie euklidesowe są wszystkie ze sobą równoliczne, Peano (1890) zaś pokazał, że można odwzorowywać jedno na drugie w sposób ciągły za pomocą odwzorowań o krotkości skończonej, a więc mało różniących się od homeomorfizmów.

Dowód niehomeomorficzności przestrzeni euklidesowych różnych wymiarów, który tu podamy, wywodzi się z idei Lebesgue'a. Idee te doprowadziły do wyodrębnienia *teorii wymiaru*, osobnej dyscypliny w ramach topologii.

Kostka euklidesowa I^n ma dla każdego $\varepsilon > 0$ pokrycie zbiorami otwartymi o średnicy $\leq \varepsilon$ takie, że każdy punkt kostki należy do nie więcej niż $n + 1$ zbiorów tego pokrycia. Inaczej: kostka I^n ma dowolnie drobne pokrycia (skończone) *krotkości* $\leq n + 1$ składające się ze zbiorów otwartych. Jest to znane zjawisko geometryczne polegające na przykład na możliwości cegielkowych pokryć przestrzeni euklidesowych (lewa strona rysunku), poszerzonych

(po prawej) do pokryć zbiorami otwartymi na tyle mało, by nadal miały tę samą krotność $n + 1$.



Rys. 78. Pokrycie cegiełkowe kwadratu ma krotność 3

Lebesgue (1911) ogłosił dowód, z którego wynikało, że kostka I^n nie ma już dowolnie drobnych pokryć krotności mniejszej niż $n + 1$ składających się ze zbiorów otwartych. Chociaż okazało się, że dowód był błędny, to jednak samo twierdzenie było prawdziwe, czego dowiódł Brouwer (1913), a później sam Lebesgue (1921). W ten sposób została odkryta pewna własność topologiczna rozróżniająca kostki (a także przestrzenie) euklidesowe różnych wymiarów. Wspomniana na wstępie praca Brouwera (1911), w której dowiódł on niehomeomorficzności E^m i E^n , $m \neq n$, nie wykazywała żadnej takiej własności⁽¹⁾.

Istnienie dowolnie drobnych pokryć krotności $\leq n + 1$ złożonych ze zbiorów otwartych można również zobaczyć na sympleksie Δ^n , który jest homeomorficzny z I^n , oraz na wielościanach będących bryłami triangulacji K wymiaru $\leq n$.

Mianowicie (była mowa o tym już wcześniej, s. 61), pokrycie bryły K gwiazdami wierzchołków triangulacji K ma krotność $\leq n + 1$. Jeśli bowiem $x \in |K|$, to x należy do pewnego sympleksu $\Delta(S)$ triangulacji K , którego zbiór S wierzchołków ma co najwyżej $n + 1$ elementów; jedynymi gwiazdami, $g_{w|K}|b$, do których punkt x może należeć, są te, dla których $b \in S$. Przy rozdrabnianiu triangulacji (np. barycentrycznym) nie pojawiają się sympleksy wymiarów wyższych niż te, które już były. Jak wiemy, istnieją dowolnie drobne podziały danej triangulacji.

Mówimy, że przestrzeń topologiczna X ma wymiar⁽²⁾ pokryciowy $\leq n$, co zapisujemy jako $\dim X \leq n$, jeśli:

⁽¹⁾ Na temat pierwszej wymienionej tu pracy Lebesgue'a była wzmianka w wykładzie 2 na s. 61, pracy Brouwera (1911) zaś w wykładzie 3 na s. 85. Dane o pozostałych dwu pracach:

L. E. J. Brouwer, *Über den natürlichen Dimensionsbegriff*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 142 (1913), 146—152; Henri Lebesgue, *Sur la correspondance entre les points de deux espaces*, Fundamenta Mathematicae 2 (1921), 257—285.

⁽²⁾ Mimo że idei topologicznego ujęcia wymiaru można szukać u Lebesgue'a i Brouwera (także u Poincarégo, a nawet u Bolzany), to zastugę zbudowania teorii mają Menger i Urysohn

(1) w każde pokrycie skończone przestrzeni X zbiorami otwartymi można wpisać pokrycie skończone krotności $\leq n + 1$ złożone ze zbiorów otwartych.

W przypadku przestrzeni zwartych założenie o skończoności pokryw nie ma znaczenia.

Istnienie dowolnie drobnych pokryw gwiazdami wierzchołków triangulacji (pokryć cegiełkowych) prowadzi poprzez lemat Lebesgue'a (istnienie liczby Lebesgue'a, por. *Aneks*, s. 70) do wniosku, że $\dim \Delta^n \leq n$.

To samo, tj. $\dim |K| \leq n$, jest prawdziwe ogólnie dla wielościanów będących bryłami triangulacji K wymiaru $\leq n$.

Mówimy, że wymiar (pokryciowy) przestrzeni X jest równy n , co zapisujemy jako $\dim X = n$, jeśli $\dim X \leq n$ i jeśli nieprawdą jest, że $\dim X \leq n - 1$.

Z samego określenia wymiaru \dim (w którym występują jedynie pojęcia teorii zbiorów i topologii formalnej) wynika, że przestrzenie homeomorficzne mają ten sam wymiar.

W przypadku przestrzeni euklidesowych, kostek euklidesowych i brył triangulacji słowo wymiar ma teraz dwa znaczenia: znaczenie elementarne (geometryczno-algebraiczne) i znaczenie jako wymiar pokryciowy, \dim .

Twierdzenie Lebesgue'a (sprawdzian teorii wymiaru). $\dim \Delta^n = n$.

D o w ó d. Przypuśćmy, że $\dim \Delta^n \leq n - 1$ (jedynie tego trzeba dowieść). Wtedy w pokrycie sympleksu Δ^n gwiazdami, $gw_{\Delta^n} a_i$, jego wierzchołków można wpisać pokrycie złożone ze zbiorów otwartych i mające krotność $\leq n$. Niech P będzie takim pokryciem.

Niech U_0 będzie sumą zbiorów V należących do pokrycia P takich, że $V \subset gw_{\Delta^n} a_0$; wierzchołek a_0 należy do U_0 , bo element V pokrycia P , do którego należy a_0 , nie jest zawarty w żadnym ze zbiorów $gw_{\Delta^n} a_i$, jeśli $i \neq 0$.

Ogólnie, zbiory otwarte U_k , $0 \leq k \leq n$ określamy jako sumy zbiorów V należących do pokrycia P takich, że

$$V \subset gw_{\Delta^n} a_k \text{ i } V \not\subset gw_{\Delta^n} a_j, j < k.$$

Jest

$$(2) \quad a_k \in U_k \subset gw_{\Delta^n} a_k.$$

(wczesne lata dwudzieste). Na temat genezy i rozwoju pojęć o wymiarze topologicznym można przeczytać w książce R. D u d y, *O pojęciu wymiaru*, Warszawa, PZWS, 1972, oraz w artykule tegoż autora w *Colloquium Mathematicum* 42 (1979), 95—110.

Teoria wymiaru od samego początku miała dwa zasadniczo różne ujęcia: oprócz pokryciowego także ujęcie indukcyjne wiążące wymiar wprost z własnościami rozcinania. W zakresie przestrzeni i zbiorów tu rozważanych oba ujęcia się pokrywają, ale ta równoważność nie jest oczywista.

Zbiory U_0, \dots, U_n pokrywają sympleks Δ^n , bo każdy element V pokrycia P znalazł się jako składnik w którymś z tych zbiorów. Wobec (2) są spełnione wszystkie założenia twierdzenia o zamocowaniu.

Stąd wynikałoby, że $U_0 \cap \dots \cap U_n \neq \emptyset$.

Tymczasem, każdy punkt x sympleksu Δ^n należy do nie więcej niż n zbiorów V pokrycia P , a każde V jest składnikiem tylko w jednym spośród zbiorów U_k ; stąd punkt x należy do co najwyżej n spośród zbiorów U_k , a więc nie może należeć do wszystkich; sprzeczność.

Twierdzenie w nietrudny sposób przenosi się na dowolne wielościany: *wymiar pokryciowy wielościanu jest równy jego wymiarowi geometrycznemu.*

Istotnie, niech $|K|$ będzie wielościanem, którego wymiar geometryczny, największy z wymiarów sympleksów triangulacji K tego wielościanu, jest równy n . Już poprzednio zauważyliśmy, że $\dim |K| \leq n$.

Dla dowodu, że $\dim |K| = n$, wystarczy wykluczyć $\dim |K| \leq n - 1$. W tym celu zauważmy, że istnienie dowolnie drobnych pokryw krotności $\leq n$ zbiorami otwartymi dla wielościanu $|K|$ implikowałoby istnienie dowolnie drobnych tego samego rodzaju pokryw dla sympleksu n -wymiarowego zawartego w $|K|$, a to jest, na mocy dowiedzionego dla sympleksu twierdzenia, niemożliwe.

Przeprowadzone rozumowanie daje w istocie więcej, a mianowicie, że w zakresie przestrzeni metrycznych⁽³⁾:

Jeśli Y jest podprzestrzenią przestrzeni X , to $\dim Y \leq \dim X$.

Dodajmy, że nie każdej przestrzeni (zwartej metrycznej) można przypisać wymiar pokryciowy. Należy do nich na przykład kostka Hilberta, która zawierając w sobie kostki euklidesowe wszelkich wymiarów, nie może być wymiaru n dla żadnego n naturalnego. Wynika to z dowiedzionego twierdzenia sprawdzianu teorii wymiaru i stwierdzenia o niezwiększaniu się wymiaru przy przejściu do podprzestrzeni.

Można więc powiedzieć, że *kostka Hilberta ma wymiar nieskończony.*

Jednak zdarza się, że przestrzeni topologicznej nie daje się przypisać wymiaru i to nie dlatego, że zawiera podprzestrzenie domknięte dowolnie dużego wymiaru, lecz z powodu jej osobliwej budowy. Henderson (1966) zbudował przestrzeń zwartą metryczną (za pomocą pewnej konstrukcji w kostce Hilberta), nie zawierającą podzbiorów domkniętych żadnego wymiaru skończonego ≥ 1 i która sama nie jest żadnym z wymiarów $0, 1, 2, \dots$ ⁽⁴⁾.

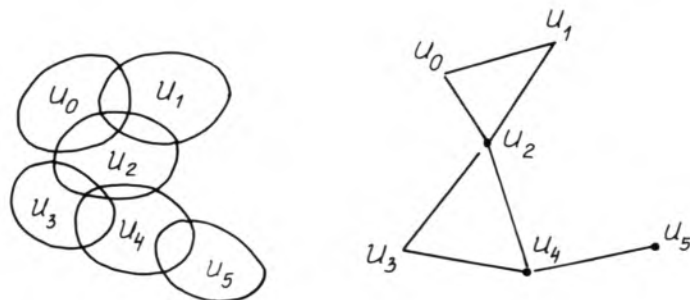
⁽³⁾ Pojęcie wymiaru \dim traci na intuicyjności dla przestrzeni topologicznych niekoniecznie pochodzenia metrycznego. Stwierdzenie przestaje być prawdziwe bez założenia metryczności, jeśli nie założyć domkniętości podprzestrzeni.

⁽⁴⁾ D. W. Henderson, *An infinite-dimensional compactum with no positive-dimensional compact subsets – a simpler construction*, American Journal of Mathematics 89 (1969), 105–121. Prostsza konstrukcję przedstawił R. H. Bing, *A hereditarily infinite dimensional space*, Proceedings of the Second Prague Topological Symposium, Academia Praha, 1967, 56–62; w *Collected Papers of Binga* (t. I, s. 497–503).

Zarówno pojęcie o wymiarze, jak i wszystkie pojęcia matematyki, nie wyłączając liczby i zbioru, ma źródła w naszym sposobie odbierania rzeczywistości. Wymiar, który nazwaliśmy geometrycznym, i cała geometria Euklidesa — geometria prostych i płaszczyzn — ma źródło w fizycznym wyróżnianiu kierunków wzajemnie prostopadłych — poziomu i pionu — a więc w odbieraniu zjawisk związanych z ciężkością. Istoty żyjące w warunkach nieważkości zapewne nie wytworzyłyby tego rodzaju geometrii i tym samym nie doszłyby do naszego pojęcia wymiarowości. Mogłyby natomiast dojść do rozumienia wymiaru pokryciowego, który zdaje sprawę z możliwych incydencji komórek przestrzennych. Owady, dla których ciężkość ma mniejsze znaczenie, posługują się wymiarem pokryciowym instynktownie, budując swoje siedziby. Jest dziwne, że fizycy — mimo że wiedzą o ograniczonej fizyczności wymiaru geometrycznego w skali kosmicznej i subatomowej — nie rezygnują zeń na rzecz wymiaru pokryciowego, który, jak się zdaje, ma znaczenie fizyczne uniwersalne⁽⁵⁾.

* * *

Jeśli U_0, \dots, U_n jest rodziną skończoną zbiorów, to przez jej *nerw* rozumie się triangulację, której wierzchołkami są U_0, \dots, U_n , a sympleksami są te podrodziny U_{i_0}, \dots, U_{i_k} , dla których $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k} \neq \emptyset$.



Rys. 79. Nerwem rodziny krążków po lewej jest triangulacja figury po prawej

Pojęcie nerwu będzie nas interesować w zakresie rodzin zbiorów będących pokryciami (skończonymi) przestrzeni, złożonymi ze zbiorów otwartych. Daje ono metodę aproksymowania przestrzeni w określony sposób wielościanami. Metoda była zapoczątkowana (1928) przez Aleksandrowa i Kuratowskiego (1933) (noty bibliograficzne, por. *Topologie I* Kuratowskiego, § 28, V—VII)⁽⁶⁾.

⁽⁵⁾ Na temat przyrodniczych aspektów wymiaru pisze w swoich książkach G. E. Gorelik: *Razmiernost' prostranstwa*, Izd. Moskovskogo Uniwersiteta, Moskwa 1983, i *Pocemu prostranstwo triechmierno?*, Nauka, Moskwa 1982.

⁽⁶⁾ P. Alexandroff, *Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elementaren geometrischen Anschauung*, *Mathematische Annalen* 98 (1928), 617—635.

Odwzorowanie w nerw pokrycia.

Niech $P = \{U_0, \dots, U_n\}$ będzie pokryciem skończonym przestrzeni normalnej X zbiorami otwartymi. Niech $N(P)$ będzie nerwem pokrycia P zrealizowanym jako zbiór pewnych ścian sympleksu $\Delta^n = \Delta(a_0, \dots, a_n)$ według pierwszego twierdzenia o realizacji, gdzie wierzchołek U_k nerwu jest utożsamiony z wierzchołkiem a_k sympleksu Δ^n ; przy tym przyporządkowaniu wierzchołki a_{i_0}, \dots, a_{i_k} są wierzchołkami sympleksu w $N(P)$, jeśli $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k} \neq \emptyset$.

Niech $\{V_0, \dots, V_n\}$ będzie pokryciem przestrzeni X zbiorami otwartymi takimi, że

$$V_k \subset \text{cl } V_k \subset U_k \text{ dla każdego } k$$

(istnienie zapewnia lemat o zmniejszaniu zbiorów w pokryciach). Niech $f_k: X \rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją ciągłą (istniejącą na mocy lematu Urysohna) taką, że

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in V_k \\ 0 & \text{dla } x \in X - U_k. \end{cases}$$

Weźmy pod uwagę odwzorowanie $f: X \rightarrow \Delta^n$ dane wzorem

$$f(x) = (f_0(x)a_0 + \dots + f_n(x)a_n) / (f_0(x) + \dots + f_n(x)),$$

poprawnym (bo mianownik nigdzie się nie zeruje) i zapewniającym ciągłość.

Zauważmy, że $f(x) \in |N(P)|$ dla każdego x .

Istotnie, niech $x \in X$ i niech $\{U_{i_0}, \dots, U_{i_k}\}$ będą wszystkimi zbiorami pokrycia P , do których należy x . Wtedy $f_j(x) = 0$, jeśli $j \notin \{i_0, \dots, i_k\}$, co znaczy, że $f(x) \in \Delta(a_{i_0}, \dots, a_{i_k})$; ale sympleks $\Delta(a_{i_0}, \dots, a_{i_k})$ należy do $N(P)$, bo $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k} \neq \emptyset$. Stąd, $f(x) \in |N(P)|$.

Odwzorowanie f jest więc odwzorowaniem w bryłę nerwu pokrycia; nazwijmy je (ze względu na sposób konstrukcji) *odwzorowaniem w nerw pokrycia*.

Mamy
$$f^{-1}(gw_{|N(P)|} a_i) \subset U_i \text{ dla każdego } i,$$

bo zbiór punktów, dla których funkcja f_i jest dodatnia, zawiera się w U_i .

Jeśli więc średnice zbiorów pokrycia P są $< \varepsilon$, to przeciwobrazy punktów, $f^{-1}(y)$, $y \in |N(P)|$, mają średnice $< \varepsilon$.

Jeśli przestrzeń jest wielościanem — bryłą $|T|$ triangulacji T — i jeśli P jest pokryciem przestrzeni $|T|$ gwiazdami wierzchołków w tej triangulacji, to nerw $N(P)$ pokrycia P jest izomorficzny z T . Izomorfizm ten jest dany przez odpowiedniość wzajemnie jednoznaczłą między wierzchołkami w triangulacji T a gwiazdami $gw_{|T|}$ w tych wierzchołków. Odpowiedniość ta wyznacza

116 odwzorowanie $|T| \rightarrow |N(P)|$, które jest homeomorfizmem.

Odwzorowania ciągle przestrzeni metrycznych, dla których średnice przeciwbrazów punktów są mniejsze niż ε , są nazywane ε -odwzorowaniami.

Jeśli X jest przestrzenią metryczną zwartą i $\dim X \leq n$, to dla każdego ε dodatniego przestrzeń X ma pokrycie krotności $\leq n + 1$ złożone ze zbiorów otwartych o średnicy $< \varepsilon$; takie pokrycie można znaleźć wśród wpisanych w pokrycie kulami o średnicy $< \varepsilon$. Ta uwaga, wobec przeprowadzonej konstrukcji odwzorowań w nerwy pokryć, pozwala na następujący

Wniosek. *Przestrzeń metryczna zwarta wymiaru $\leq n$ ma dla każdego ε dodatniego ε -odwzorowanie w wielościan wymiaru $\leq n$.*

Prawdziwe jest twierdzenie odwrotne wynikające z następującego — nie-trudnego do dowodu — ogólnego stwierdzenia:

Jeśli przestrzeń metryczna zwarta ma dla każdego ε dodatniego ε -odwzorowanie w pewną przestrzeń metryczną wymiaru $\leq n$, to jest wymiaru $\leq n$.

Ostatnie stwierdzenia składają się na charakteryzację przestrzeni wymiaru $\leq n$ w zakresie przestrzeni metrycznych zwartych jako tych, które dla każdego $\varepsilon > 0$ mają ε -odwzorowanie w wielościan wymiaru $\leq n$.

Jeśli podprzestrzeń zwarta przestrzeni euklidesowej E^n ma wymiar n , to zawiera pewną kulę otwartą, tj. ma wewnątrz niepuste.

* * *

Twierdzenie Menger-Nöbelinga⁽⁷⁾. *Przestrzeń metryczną zwartą wymiaru n można zanurzyć w przestrzeń euklidesową E^{2n+1} .*

Wiemy, że twierdzenie to jest prawdziwe dla wielościanów (por. wykład 2, s. 56); jego prawdziwość dla ogółu przestrzeni metrycznych zwartych będzie jeszcze jednym sprawdzianem teorii wymiaru. Liczby $2n+1$ nie można zmniejszyć, Flores, 1933/1934.

Twierdzenie wynika łatwo z następujących lematów.

Lemat 1. *Odwzorowanie ciągle przestrzeni metrycznej zwartej w przestrzeń metryczną jest zanurzeniem, jeśli jest ε -odwzorowaniem dla każdego ε dodatniego.*

⁽⁷⁾ K. Menger, *Über umfassendste n -dimensionale Mengen*, Proc. Akad. Wetensch., Amsterdam 29 (1926), 1125—1128, G. Nöbeling, *Über eine n -dimensionale Universalmenge in E_{2n+1}* , Mathematische Annalen 104 (1930), 71—80, L. Pontriagin, G. Tołstowa, *Beweis des Mengerschen Einbettungssatzes*, Mathematische Annalen 105 (1931), 737—747.

Prawdziwe jest twierdzenie (w zasadzie występujące już u Nöbelinga) orzekające, że przestrzeń E^{2n+1} zawiera podprzestrzeń zwartą wymiaru n — nazywaną przestrzenią uniwersalną dla wymiaru n — w którą można zanurzyć każdą przestrzeń metryczną zwartą wymiaru $\leq n$; por. np. *Topologie II* Kuratowskiego, s. 70 wydania z 1950 r. Dla $n = 1$ jest to tzw. krzywa uniwersalna Menger leżąca w E^3 .

Lemat 2. Dla każdego ε dodatniego zbiór wszystkich ε -odwzorowań przestrzeni metrycznej zwartej X w przestrzeń metryczną Y jest podzbiorem otwartym w przestrzeni wszystkich odwzorowań ciągłych $X \rightarrow Y$.

Lemat 3. Dla każdego ε dodatniego zbiór wszystkich ε -odwzorowań przestrzeni metrycznej zwartej X wymiaru $\leq n$ w przestrzeń E^{2n+1} jest podzbiorem gęstym w przestrzeni wszystkich odwzorowań ciągłych $X \rightarrow E^{2n+1}$.

Wiadomo, że przestrzeń odwzorowań ciągłych przestrzeni zwartej X w przestrzeń zupełną Y , z metryką $d(f, g) = \sup \{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$, jest zupełna⁽⁸⁾.

Niech G_j będzie zbiorem wszystkich $(1/j)$ -odwzorowań przestrzeni metrycznej zwartej X w E^{2n+1} . Na mocy lematów 2 i 3 jest to podzbiór otwarty i gęsty w przestrzeni wszystkich odwzorowań ciągłych $X \rightarrow E^{2n+1}$. Na mocy twierdzenia Baire'a, wobec zupełności przestrzeni odwzorowań $X \rightarrow E^{2n+1}$, przekrój zbiorów G_j jest niepusty (jest nawet G_j -ą gęstą). Każdy element tego przekroju jest odwzorowaniem zanurzającym X w E^{2n+1} (lemat 1).

Dowód lematu 1. Z założeń wynika bezpośrednio, że odwzorowanie jest jednokrotne. Jest więc zanurzeniem (wystarczyłoby wiedzieć o dziedzinie, że jest zwarta, a o przeciwdziedzinie, że jest T_2).

Dowód lematu 2. Niech $f: X \rightarrow Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że dla każdego j istnieje odwzorowanie ciągłe $g_j: X \rightarrow Y$ takie, że $d(f, g_j) \leq 1/j$ i nie będące ε -odwzorowaniem. Wykażemy, że f nie jest ε -odwzorowaniem (co będzie dowodzić, że dopełnienie zbioru ε -odwzorowań jest domknięte).

Dla każdego j istnieją więc punkty x_j i x'_j takie, że $d(x_j, x'_j) \geq \varepsilon$ i takie, że $g_j(x_j) = g_j(x'_j)$. Możemy założyć, wobec zwartości przestrzeni X , że ciągi x_j i x'_j są zbieżne. Niech $x_j \rightarrow x$ i $x'_j \rightarrow x'$; jest $d(x, x') \geq \varepsilon$. Wykażemy, co zakończy dowód, że $f(x) \neq f(x')$.

Dla dowodu, niech η będzie dowolną liczbą dodatnią. Dla każdego j mamy: $d(f(x), f(x')) \leq d(f(x), f(x_j)) + d(f(x_j), g_j(x_j)) + d(g_j(x_j), g_j(x'_j)) + d(g_j(x'_j), f(x'_j)) + d(f(x'_j), f(x'))$. Trzecia z kolei liczba po prawej jest równa 0; istnieje j_* takie, że dla $j \geq j_*$ druga i czwarta liczba jest nie większa niż $\eta/4$; powiększając, jeśli trzeba, j_* oraz wykorzystując ciągłość f w punktach x i x' , można zmniejszyć pierwszą i piątą liczbę do $\eta/4$ dla $j \geq j_*$. Mamy więc $d(f(x), f(x')) \leq \eta$, co wobec dowolności η daje żadaną równość.

⁽⁸⁾ Patrz np. R. Engelking, *Topologia ogólna II*, Warszawa 1989, s. 314.

Książki z teorii wymiaru: K. Menger, *Dimensionstheorie*, Leipzig—Berlin 1928; C. Kuratowski, *Topologie I—II*, Warszawa—Wrocław, 1948—1950, § 20—§ 23 I i § 40 II; W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton 1941; P. S. Aleksandrow, B. A. Pasynkow, *Wwiedienije w teoriju razmiernostiej*, Moskwa 1973; R. Engelking, *Teoria wymiaru*, Warszawa 1977; W. Rinow, *Lehrbuch der Topologie*, Berlin 1975, s. 349—377; A. R. Pears, *Dimension theory of general spaces*, Cambridge 1975; K. Nagami, *Dimension theory*, New York 1970; J. Nagata, *Modern dimension theory*, Groningen 1965.

Dowód lematu 3. Wystarczy wykazać, że jeśli $f: X \rightarrow E^{2n+1}$ jest odwzorowaniem ciągłym i $\eta > 0$ jest dane, to istnieje ε -odwzorowanie $g: X \rightarrow E^{2n+1}$ takie, że $d(f, g) \leq 3\eta$.

Wobec jednostajnej ciągłości f istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $d(x, x') \leq \delta$, to $d(f(x), f(x')) \leq \eta/2$; przyjmijmy, że $\delta \leq \varepsilon$.

Niech U_0, \dots, U_r będzie pokryciem przestrzeni X zbiorami otwartymi o średnicy $\leq \delta$. Mamy: $\text{diam } f(U_j) \leq \delta$ dla każdego j .

Niech p_0, \dots, p_r będą punktami w E^{2n+1} takimi, że $d(p_j, q) \leq \eta$, jeśli $q \in f(U_j)$, i będącymi w położeniu ogólnym (takie punkty można znaleźć na mocy lematu dowiedzionego w wykładzie 2, s. 56).

Niech N będzie nerwem pokrycia $\{U_0, \dots, U_r\}$ zrealizowanym w E^{2n+1} przez przyporządkowanie $U_j \rightarrow p_j$. Niech $g: X \rightarrow |N|$ będzie odwzorowaniem naturalnym. Odwzorowanie g jest ε -odwzorowaniem, bo jest δ -odwzorowaniem i $\delta < \varepsilon$.

Obliczamy odległość g i f . Niech $x \in X$. Niech U_{i_0}, \dots, U_{i_k} będą wszystkimi zbiorami wśród zbiorów U_j do których należy x . Mamy:

$$\begin{aligned} (3) \quad & f(x) \in f(U_{i_0}) \cap \dots \cap f(U_{i_k}), \\ (4) \quad & g(x) \in gw_{|N|p_{i_0}} \cup \dots \cup gw_{|N|p_{i_k}}. \end{aligned}$$

Gwiazdy wierzchołków triangulacji N mają średnice $\leq 2\eta$. Zatem, wierzchołki p_{i_j} są oddalone od $f(x)$ nie więcej niż o η . Stąd, wobec (3) i (4), $d(f(x), g(x)) \leq 3\eta$.

WYKŁAD 5. Homotopia odwzorowań • Przestrzenie ściągalne • Nieściągłość sfer • Typ homotopii przestrzeni • Odwzorowania w sfery: istotne i nieistotne • Lemat Borsuka o przedłużaniu homotopii • Twierdzenie o przedłużaniu odwzorowań nieistotnych • Odwzorowania istotne na kostki • Twierdzenia Łokuciewskiego i Holsztyńskiego o punktach incydencji • Przedłużanie odwzorowań w S^n z podzbiorów domkniętych wielościanów

Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi i niech f i g będą odwzorowaniami ciągłymi X w Y . Odwzorowanie ciągłe

$$H: X \times I \rightarrow Y$$

(przez I oznaczamy — jak zwykle — odcinek $0 \leq t \leq 1$) takie, że

$$H(x, 0) = f(x) \text{ i } H(x, 1) = g(x)$$

dla każdego x , $x \in X$, nazywamy *homotopią łączącą odwzorowania f i g* .

Dla każdego t , $0 \leq t \leq 1$, rozważmy odwzorowanie $h_t: X \rightarrow Y$ dane wzorem

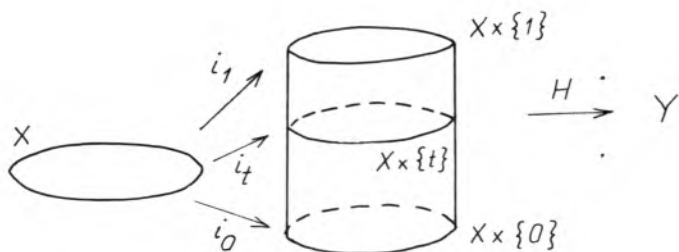
$$h_t(x) = H(x, t) \text{ dla } x \in X.$$

Przy tych oznaczeniach mamy $h_0 = f$ i $h_1 = g$.

Na homotopię H można by więc patrzeć jako na rodzinę h_t wskaźnikowaną liczbami z odcinka $0 \leq t \leq 1$, łączącą w przestrzeni odwzorowań $X \rightarrow Y$ odwzorowania $h_0 = f$ i $h_1 = g$. Ten punkt widzenia nie będzie wszakże konieczny; wymagałby zresztą sprecyzowania tego, co rozumiemy przez *przestrzeń odwzorowań*⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Jeśli Y jest przestrzenią metryczną, to za odległość odwzorowań f i g zbioru X w przestrzeni Y uznajemy

$$\sup \{d(f(x), g(x)): x \in X\},$$



Rys. 80. Homotopia łącząca f i g

Jeśli przez i_t oznaczy się zanurzenie przestrzeni X w $X \times I$ dane wzorem $i_t(x) = (x, t)$, to $h_t = H \circ i_t$; w szczególności, $f = h_0 = H \circ i_0$ i $g = h_1 = H \circ i_1$.

Jeśli istnieje homotopia łącząca odwzorowania f i g , to te odwzorowania nazywamy *homotopijnymi*, co zapisujemy symbolem $f \simeq g$ lub $f \stackrel{H}{\simeq} g$, jeśli chcemy uwidocznić homotopię łączącą te odwzorowania. Nie ma znaczenia, że odcinek I przebiegający przez parametr t — najczęściej o tym parametrze myślimy jako o czasie — ma końce w 0 i 1.

Oczywiste są następujące własności:

$$\begin{aligned} f &\simeq f, \\ f &\simeq g \Rightarrow g \simeq f, \\ f &\simeq g \text{ i } g \simeq h \Rightarrow f \simeq h, \end{aligned}$$

przyjmując, że supremum jest $< \infty$. Zastrzeżenie to nie jest potrzebne, np. w przypadku gdy X jest przestrzenią zwartą, a odwzorowania są ciągłe. Wtedy zbiór odwzorowań X w Y staje się przestrzenią metryczną.

Przy ustalonym t (po obcięciu do $X \times \{t\}$) homotopia $H: X \times I \rightarrow Y$ jest odwzorowaniem ciągłym $h_t: X \rightarrow Y$. Z ciągłości homotopii H (ta ciągłość jest w istocie jednostajna) wynika, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$|t - t'| \leq \delta \Rightarrow d(H(x, t), H(x, t')) \leq \varepsilon$$

dla każdego x , co znaczy

$$|t - t'| \leq \delta \Rightarrow d(h_t, h_{t'}) \leq \varepsilon.$$

Odwzorowanie h_t zależy więc — jako element przestrzeni odwzorowań — w sposób ciągły od t ; odwzorowania h_t tworzą drogę łączącą h_0 z h_1 w przestrzeni odwzorowań.

Idea homotopii sięga Gaussa i Cauchy'ego: całki po krzywych zamkniętych, jeśli te krzywe nie zawierają „między sobą” punktów osobliwych funkcji całkowanych, są równe. W sposób bardziej wyraźny homotopia pojawia się w teorii funkcji analitycznych związku z potrzebą ugruntowania pojęcia przedłużenia analitycznego i poprawnego ujęcia teorii powierzchni Riemanna. Homotopia jest obecna w pracach Poincarégo, ale w oderwaniu od kontekstu analitycznego pojawia się dopiero u Brouwera w jego podstawowej pracy *Über Abbildung der Mannigfaltigkeiten* (1911), chociaż jeszcze bez użycia nazwy „homotopia” i bez arytmetycznych szczegółów określenia, które u Brouwera sprowadza się do zwrotu o możliwości przeprowadzenia jednego odwzorowania w drugie w sposób ciągły. Te arytmetyczne szczegóły i nazwa są już u Kerékjártya w *Vorlesungen...* (1923), ale dotyczą deformacji homotopijnej zbiorów. U Seiferta i Threlfalla pojęcie homotopii występuje w obecnej postaci; H. Seifert, W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig 1934, s. 113.

które razem orzekają, że *relacja homotopijności jest relacją typu równoważności*. Stąd, zbiór odwzorowań ciągłych $X \rightarrow Y$ rozpada się na zbiory odwzorowań homotopijnych ze sobą, nazywane *klasami homotopii*.

Nietrudne dla dowodu są następujące proste zależności:

$$\begin{aligned} f \simeq f' &\Rightarrow f \circ g \simeq f' \circ g, \\ f \simeq f' &\Rightarrow h \circ f \simeq h \circ f'. \end{aligned}$$

dla wszelkich odwzorowań g i h , z którymi f i f' można składać.

* * *

Szczególną rolę wśród odwzorowań zajmują odwzorowania przestrzeni w siebie. Homotopię zaczynającą się odwzorowaniem tożsamościowym nazywamy *deformacją przestrzeni*.

Deformacja przestrzeni Z jest więc homotopią $H: Z \times I \rightarrow Z$ taką, że $H(z, 0) = z$ dla $z \in Z$.

Jeśli deformacja przestrzeni kończy się odwzorowaniem stałym — stałą wartością jest pewien punkt przestrzeni — to jest to *deformacja do punktu*; istnieje wtedy $z_0, z_0 \in Z$, takie, że

$$H(z, 1) = z_0 \text{ dla } z \in Z.$$

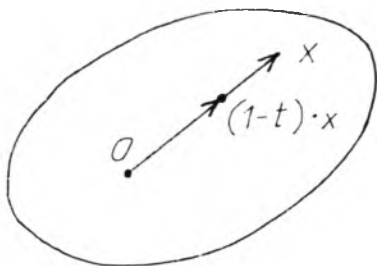
Przestrzeń mająca deformację do punktu jest nazywana *przestrzenią ściągłą*.

Twierdzenie. *Podprzestrzenie wypukłe przestrzeni euklidesowych są ściągłe.*

D o w ó d. Niech X będzie podzbiorem wypukłym przestrzeni euklidesowej E^n . Nie zmniejszmy ogólności, jeśli przyjmiemy, że $0 \in X$. Odwzorowanie $H(x, t) = (1 - t)x$, $0 \leq t \leq 1$, $x \in X$, jest deformacją zbioru X do jego punktu 0 .

Określenie jest poprawne: odwzorowanie H jest rzeczywiście odwzorowaniem o wartościach w X , bo punkty $(1 - t)x$, $0 \leq t \leq 1$, są wszystkie punktami zbioru X wobec wypukłości tego zbioru i tego, że 0 i x należą do X .

Twierdzenie jest prawdziwe — co widać z dowodu — dla zbiorów o kształcie gwiazdy; ale zauważmy, że jest prawdziwe dla wszystkich przestrzeni homeomorficznych z podprzestrzeniami wypukłymi przestrzeni euklidesowych, bo ściągłość jest własnością topologiczną, a więc zachowującą się przy przejściu do obrazu homeomorficznego.



Rys. 81. Ściągłość przestrzeni wypukłej

Jeśli przestrzeń ma deformację do punktu, to ma deformację do każdego swego punktu.

Dla dowodu, zauważmy najpierw, że *przestrzeń ściągalna jest łukowo spójna.*

Istotnie, niech H będzie deformacją przestrzeni X do jej punktu x_0 . Jeśli x jest punktem przestrzeni X , to punkty $H(x, t)$, $0 \leq t \leq 1$ tworzą drogę łączącą x z x_0 . Stąd, każde dwa punkty przestrzeni — łącząc ze sobą drogi łączące te punkty z punktem x_0 — można połączyć drogą⁽²⁾.

Teraz już nietrudno zakończyć dowód.

Niech będzie dana deformacja H przestrzeni X do jej punktu x_0 . Aby otrzymać deformację do innego jej punktu x_1 , wystarczy daną deformację $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$, $H(x, 0) = x$ i $H(x, 1) = x_0$ dla $x \in X$ zesztukować z drogą $s: [1, 2] \times X$, $s(1) = x_0$, $s(2) = x_1$, łączącą x_0 z x_1 .

Sfera S^0 — przestrzeń złożona z końców odcinka — kuli 1-wymiarowej jako przestrzeń niespójna, nie jest ściągalna. Sfery S^n dla $n \geq 1$, tj. brzegi kul $(n + 1)$ -wymiarowych są przestrzeniami spójnymi. Mimo to:

Twierdzenie. *Sfery (niezależnie od wymiaru) nie są przestrzeniami ściągalnymi.*

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje deformacja sfery S^n do punktu. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że realizuje się ona za pomocą odwzorowania $H: S^n \times I \rightarrow S^n \times \{0\}$, gdzie $I = \{t: 0 \leq t \leq 1\}$ i gdzie $H(x, 0) = (x, 0)$ oraz $H(x, 1) = (c, 0)$ dla każdego $x \in S^n$ (c jest ustalonym punktem sfery S^n); przyjęliśmy więc dla pewnych dalszych udogodnień rachunkowych, że sfera S^n jest dolną podstawą $S^n \times \{0\}$ walca $S^n \times I$.

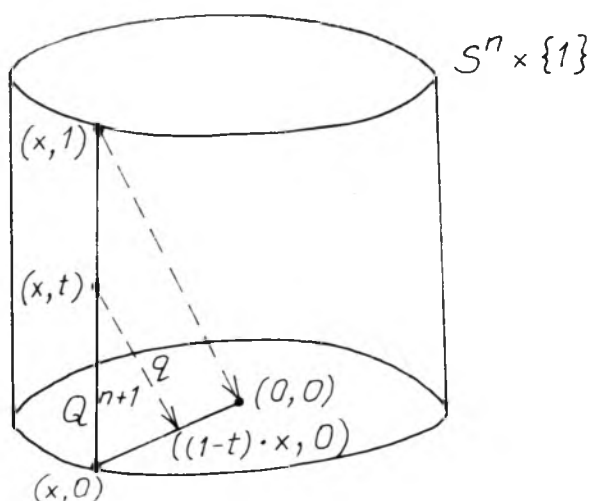
Weźmy pod uwagę odwzorowanie q walca $S^n \times I$ na $Q^{n+1} \times \{0\}$, gdzie Q^{n+1} jest kulą, której brzeg stanowi S^n , dane wzorem

$$q(x, t) = ((1 - t)x, 0)$$

dla $x \in S^n$ i $0 \leq t \leq 1$. Górna podstawa walca (punkty $t = 1$) przechodzi w środek kuli — punkt $(0, 0)$; odwzorowanie q nie identyfikuje żadnych innych punktów.

Odwzorowanie H identyfikuje wszystkie punkty $(x, 1)$ walca $S^n \times I$, prowadząc je w punkt $(c, 0)$. Na mocy ogólnych własności odwzorowań

⁽²⁾ Przez drogę w przestrzeni X , łączącą punkty a i b tej przestrzeni, rozumie się odwzorowanie ciągłe $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$ takie, że $\sigma(0) = a$ i $\sigma(1) = b$. Droga może mieć samoprzecięcia, może być ich nawet tak dużo, że wypełni całą przestrzeń (odwzorowanie Peany), ale zawsze da się ją skrócić do łuku bez samoprzecięć — wystarczy likwidacja pętli przez indukcję. Jeśli jednak samoprzecięcie jest nieskończenie wiele, może to wymagać użycia lematu Zorn; Kerékjártó (*Vorlesungen...*, s. 192) powołuje się w tym na Kaluzsaya, a G. T. Whyburn w *Analytic topology* (wydanie z 1942 r., s. 39) na Kelleya.



Rys. 82. Odwzorowanie q . Kula Q^{n+1} jest — jak dotąd — kulą $|x| \leq 1$ w E^{n+1}

ilorazowych (odwzorowanie q jest domknięte, więc ilorazowe) istnieje odwzorowanie $r: Q^{n+1} \times \{0\} \rightarrow S^n \times \{0\}$ takie, że $roq = H$. Odwzorowanie r jest tożsamością na $S^n \times \{0\}$. Sprzeczność z twierdzeniem o niemożliwości retrakcji kuli na brzeg.

Twierdzenie o nieściągłości sfer dostaliśmy z twierdzenia o niemożliwości retrakcji kuli na brzeg. Na odwrót:

Nieściągłość sfery S^n implikuje niemożliwość retrakcji Q^{n+1} na S^n .

Załóżmy bowiem, że mamy retrakcję $r: Q^{n+1} \rightarrow S^n$. Można wtedy określić homotopię $H: S^n \times I \rightarrow S^n$ wzorem

$$H(x, t) = r((1-t)x)$$

dla $x \in S^n$ i $0 \leq t \leq 1$. Mamy $H(x, 0) = r(x) = x$ i $H(x, 1) = r(0)$ dla wszelkich $x \in S^n$. Dostaliśmy zatem deformację sfery S^n do jej punktu $r(0)$.

Klasyfikacja homotopijna odwzorowań sfery S^n w siebie jest więc nietrywialna. Są co najmniej dwie klasy. Do jednej należą odwzorowania homotopijne ze stałymi. Nie należy do niej odwzorowanie tożsamościowe. Ile jest klas homotopii wśród odwzorowań $S^n \rightarrow S^n$, tego dowiedzione twierdzenie nie rozstrzyga⁽³⁾.

Homeomorfizm kuli Q^n wielowymiarowej na siebie przeprowadza brzeg na brzeg. Samo twierdzenie jest nam znane z poprzedniego wykładu, ale w poda-

⁽³⁾ Klasy homotopii odwzorowań $S^n \rightarrow S^n$, $n > 0$ są w odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej z liczbami całkowitymi i są zdeterminowane *stopniem odwzorowania* — twierdzenie Hopfa; dla $n = 1$ stopień odwzorowania jest omawiany w wykładzie 9; dla dowolnego wymiaru por. np. P. Hilton, *An introduction to homotopy theory*, Cambridge University Press 1953.

nym tam dowodzie nie wskazywało się na żadną własność topologiczną punktów brzegowych, która odróżniałaby je od punktów niebrzegowych. W przypadku odcinka — kuli jednowymiarowej — tą własnością było nierozcinanie odcinka przez punkt końcowy i rozcinanie przez punkt niekończący.

W wymiarach wyższych ta własność przestaje odróżniać punkty brzegowe od niebrzegowych. Prawdą jest natomiast, że:

Twierdzenie. *Przestrzeń $Q^n - \{p\}$ jest ściągalna, jeśli $p \in S^{n-1}$, tj. jeśli p należy do brzegu kuli Q^n , i nie jest ściągalna, jeśli $p \in Q^n - S^{n-1}$, tj. jeśli p należy do wnętrza geometrycznego kuli Q^n .*

D o w ó d. 1. Niech $p \in S^{n-1}$. Deformację przestrzeni $Q^n - \{p\}$ określa wzór $D(x, t) = (1 - t)x$, gdzie $x \in Q^n - \{p\}$ i $0 \leq t \leq 1$.

2. Niech $p \in Q^n - S^{n-1}$. Jeśliby istniała deformacja — nazwijmy ją H — przestrzeni $Q^n - \{p\}$ do jakiegokolwiek jej punktu, to wzór

$$G(x, t) = (H(x, t) - p)/(H(x, t) - p)$$

ograniczony do x należących do S^{n-1} określałby odwzorowanie — deformację sfery S^{n-1} do punktu, co jest niemożliwe.

Twierdzenie. *Odwzorowania ciągle określone na przestrzeniach ściągalnych są homotopijne z odwzorowaniami stałymi.*

D o w ó d. Niech X będzie przestrzenią ściągłą i niech $f: X \rightarrow Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Niech H będzie deformacją przestrzeni X do punktu x_0 . Odwzorowanie $f \circ H$ jest homotopią łączącą f z odwzorowaniem przestrzeni X w punkt $f(x_0)$ przestrzeni Y .

Wniosek. *Każde dwa odwzorowania ciągle przestrzeni ściągłej w przestrzeń łukowo spójną są ze sobą homotopijne.*

D o w ó d. Niech X będzie przestrzenią ściągłą, a Y przestrzenią łukowo spójną. Niech f i g będą odwzorowaniami ciągłymi $X \rightarrow Y$. Na mocy poprzedniego twierdzenia f jest homotopijne z odwzorowaniem przestrzeni X w pewien punkt a przestrzeni Y , odwzorowanie g zaś odwzorowaniem w punkt b . Niech σ będzie drogą łączącą w Y punkty a i b . Sztukując homotopię łączącą f z odwzorowaniem w a , $0 \leq t \leq 1$, z drogą σ przebiegającą przez t z przedziału $1 \leq t \leq 2$ i z homotopią łączącą odwzorowanie w b z odwzorowaniem g , $2 \leq t \leq 3$, otrzymujemy homotopię łączącą f z g .

Twierdzenie. *Odwzorowania ciągle w przestrzenie ściągłe są homotopijne z odwzorowaniami stałymi.*

D o w ó d. Niech Y będzie przestrzenią ściągającą i niech H będzie deformacją przestrzeni Y do punktu y_0 . Niech $f: X \rightarrow Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Odwzorowanie dane wzorem $H(f(x), t)$ dla $x \in X$ i dla t przebiegającego odcinek potrzebny dla deformacji przestrzeni Y do punktu y_0 jest homotopią łączącą odwzorowanie f z odwzorowaniem w punkt y_0 .

Wniosek. Każde dwa odwzorowania ciągle w przestrzeń ściągającą są homotopijne.

D o w ó d. Dowód taki sam, jak w poprzednim wniosku, jeśli się przypomni, że przestrzenie ściągające są łukowo spójne.

Jeśli istnieją odwzorowania ciągle $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow X$ takie, że

$$(*) \quad g \circ f \simeq 1_X \text{ i } f \circ g \simeq 1_Y$$

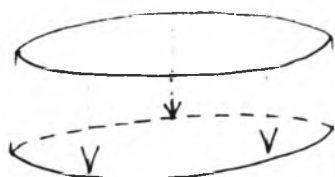
(przez 1_Z rozumiemy tożsamość na Z), to mówimy, że przestrzenie X i Y mają ten sam typ homotopii. O parze odwzorowań f i g spełniających (3) mówimy zaś, że stanowią *homotopijną równoważność*. Jeśli X i Y są przestrzeniami homeomorficznymi, to mają oczywiście ten sam typ homotopii: we wzorach (*) pojawiają się wtedy równości w miejscu \simeq .

Rozbicie na typy homotopii jest klasyfikacją grubszą niż ta, którą dostajemy, porównując przestrzenie za pomocą homeomorfizmów.

Twierdzenie. Przestrzenie ściągające są tym samym co przestrzenie mające typ homotopii przestrzeni jednopunktowych.

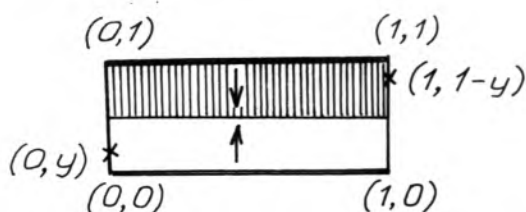
D o w ó d. 1. Niech X będzie przestrzenią ściągającą i niech $\{p\}$ będzie przestrzenią jednopunktową. Niech $f: \{p\} \rightarrow X$ będzie odwzorowaniem w punkt x przestrzeni X i niech g będzie (jedynym istniejącym) odwzorowaniem przestrzeni X na $\{p\}$. Oczywiście, $g \circ f$ jest tożsamością na $\{p\}$. Odwzorowanie $f \circ g$ jest odwzorowaniem przestrzeni X w swój punkt x . Ze ściągłości przestrzeni X wynika, że $f \circ g \simeq 1_X$.

2. Załóżmy, że X ma ten sam typ homotopii co przestrzeń jednopunktowa $\{p\}$. Istnieje wtedy odwzorowanie $f: \{p\} \rightarrow X$ takie, że $f \circ g \simeq 1_X$, gdzie g jest (jedynym) odwzorowaniem X na $\{p\}$. Odwzorowanie $f \circ g: X \rightarrow X$ jest odwzorowaniem przestrzeni X w jej punkt $f(p)$. Z $f \circ g \simeq 1_X$ wynika istnienie deformacji przestrzeni X do tego punktu.



Rys. 83. Homotopijna równoważność powierzchni walca i okręgu

Okrąg i powierzchnia boczna walca, którego podstawą jest ten okrąg, mają, oczywiście, ten sam typ homotopii: inkluzja i rzutowanie walca na podstawę, które jest homotopijne z tożsamością (rys. 83), stanowią parę odwzorowań realizujących homotopijną równoważność.



Rys. 84. Wstęga Möbiusa jest powierzchnią powstałą z prostokąta płaskiego przez sklejenie dwu przeciwnych boków tego prostokąta za pomocą homeomorfizmu zmieniającego orientację, np. przez utożsamienie ze sobą w prostokącie $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ par punktów $(0, y)$ i $(1, 1-y)$. Po sklejeniu para boków $y = 0$ i $y = 1$ tworzy okrąg — brzeg wstęgi Möbiusa

Ale, mniej oczywiste jest to, że okrąg i wstęga Möbiusa⁽⁴⁾ mają ten sam typ homotopii.

Odcinek $y = 1/2$ przechodzi po sklejeniu w okrąg — linię środkową wstęgi Möbiusa, która nie rozcina (!) wstęgi Möbiusa.

Odwzorowanie prostokąta na jego linię środkową $y = 1/2$, dane przyporządkowaniem $(x, y) \rightarrow (x, 1/2)$, wyznacza odwzorowanie wstęgi Möbiusa na jej linię środkową, które, będąc homotopijne z tożsamością, stanowi wraz z inkluzją tej linii środkowej we wstęgę Möbiusa parę odwzorowań realizujących zapowiedzianą homotopijną równoważność.

Opisane wyżej odwzorowanie na linię środkową jest retrakcją. Później zobaczymy (wykład 9, s. 185), że retrakcja wstęgi Möbiusa na jej brzeg jest niemożliwa.

Przez przechodniość wstęgi Möbiusa i powierzchnia boczna walca mają ten sam typ homotopii.

Nie są wszakże homeomorficzne; powierzchnia boczna walca jest spłaszczalna, a

Wstęga Möbiusa jest niespłaszczalna.

Niech S będzie linią środkową wstęgi Möbiusa M .

Jeśliby istniał homeomorfizm $h: M \rightarrow h(M)$ na podzbiór płaszczyzny, to $h(M - S)$ — jako zbiór spójny — byłby zawarty w jednym z obszarów, na które zbiór $h(S)$ rozcina płaszczyznę; zbiór $h(S)$ — homeomorficzny z okręgiem — rozcina płaszczyznę i jest brzegiem każdego z obszarów dopełnienia, na mocy nie w pełni jeszcze dowiedzionego twierdzenia Jordana (dowód jest w wykładzie 7). Punkty zbioru $h(S)$ są punktami brzegowymi zbioru $h(M)$, co przy powołaniu się na ciągłość odwzorowania h wynika z poprzedniej uwagi, ale wobec twierdzenia o zachowaniu otwartości punkty zbioru $h(S)$ powinny być punktami wnętrza zbioru $h(M)$, ponieważ punkty linii S są punktami wewnętrznymi wstęgi M .

⁽⁴⁾ Najbardziej znaną własnością wstęgi Möbiusa jest ta, że jest to powierzchnia mająca tylko jedną stronę — rzecz zrozumiała w sensie fizycznym, możliwa do określenia matematycznie, równoważna z tym, co się nazywa nieorientowalnością; por. np. W. S. Massey, *Algebraic topology: an introduction*, Yale University Press, 1971; w tłum. ros. z 1977 r. na s. 17—20.

Klasyfikacja homotopijna rozróżnia pewne figury, które — zdawałoby się — powinna utożsamiać.

Tzw. *okrąg warszawski* (rys. 77, s. 107) to okrąg z jedną osobliwością taką, jaką ma sinusoida zagęszczona $y = \sin(1/x)$. Okrąg i okrąg warszawski różnią się typem homotopii (wskazówka dla dowodu: obrazem okręgu przy odwzorowaniu w okrąg warszawski jest zawsze odcinek).

Tę wadę klasyfikacji homotopijnej — która jest w opisanym przypadku zbyt dokładna — usuwa *teoria kształtu Borsuka*, gdzie własności homotopijne przestrzeni bada się poprzez własności homotopijne ich aproksymacji wielościennych⁽⁵⁾.

Głównym celem tego wykładu są homotopie odwzorowań w sfery. Jak dotąd, sfery są jedynymi znanymi nam (pomijając przestrzenie niespójne) przestrzeniami nietrywialnymi homotopijnie.

Odwzorowania stałe i odwzorowania z nimi homotopijne będziemy nazywać *nieistotnymi*, a pozostałe *istotnymi*.

Przykładem — dotychczas jedynym nam znanym — odwzorowania istotnego w S^n jest tożsamość na S^n .

Twierdzenie. *Jeśli $f: X \rightarrow S^n$ jest odwzorowaniem istotnym, to $f(X) = S^n$.*

D o w ó d. Przypuśćmy, że $S^n - f(X) \neq \emptyset$. Niech $p \in S^n - f(X)$. Jest wtedy $f(X) \subset S^n - \{p\}$. Ale $S^n - \{p\}$ jest przestrzenią homeomorficzną z przestrzenią euklidesową E^n poprzez odwzorowanie stereograficzne (patrz rys. 6, s. 15). Istnieje zatem deformacja H przestrzeni $S^n - \{p\}$ do punktu. Odwzorowanie określone dla $x \in X$ i $0 \leq t \leq 1$ wzorem $H(f(x), t)$ jest homotopią zaczynającą się odwzorowaniem f i kończącą się odwzorowaniem w punkt.

Twierdzenia nie da się odwrócić. Przykładów jest pod dostatkiem. Może do mniej oczywistych należą odwzorowania Peany, na przykład odwzorowanie S^1 na S^2 . Ich nieistotność wynika z następującej ogólniejszej prawidłowości.

Twierdzenie. *Każde odwzorowanie wielościanu wymiaru $< n$ w sferę S^n jest nieistotne.*

D o w ó d. Niech $|W|$ będzie wielościanem wymiaru $< n$ (symbol W oznacza triangulację wielościanu; to, że wielościan ma wymiar $< n$, znaczy, że wymiary sympleksów jego triangulacji W są mniejsze niż n). Niech $f: |W| \rightarrow S^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Z twierdzenia o aproksymacji symplecjoidalnej wynika, że istnieje odwzorowanie $g: |W| \rightarrow S^n$ symplecjoidalne ze względu na pewien podział triangulacji W i triangulacji sfery S^n , którą przyjęliśmy za daną,

homotopijne z f . Wymiar obrazu $g(|W|)$ wielościanu $|W|$ nie przekracza wymiaru triangulacji W , ponieważ odwzorowanie symplecticzne nie podnosi wymiaru. Stąd, obraz $g(|W|)$ nie wypełnia całej sfery S^n i na mocy dowiedzonego twierdzenia g jest odwzorowaniem nieistotnym. Odwzorowanie f , z nim homotopijne, jest więc też odwzorowaniem nieistotnym.

Jeśli odwzorowanie w S^n nie jest odwzorowaniem na całe S^n i jest określone na podzbiorze domkniętym przestrzeni metrycznej, to, na mocy twierdzenia Tietzego, jest przedłużalne na całą przestrzeń (twierdzenie Tietzego ma zastosowanie, bo zbiór wartości danego odwzorowania mieści się w zbiorze homeomorficznym z kulą euklidesową), ale twierdzenie — jak zobaczymy — przenosi się na wszelkie odwzorowania nieistotne.

Środkiem, który posłuży do dowodu, jest

Lemat Borsuka o przedłużaniu homotopii⁽⁶⁾. Niech A będzie podzbiorem domkniętym przestrzeni metrycznej X . Niech $f: X \rightarrow S^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym i niech dana będzie homotopia $H: A \times I \rightarrow S^n$ zapoczątkowana odwzorowaniem $f|_A$, tj. taka, że

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{dla } x \in A.$$

Istnieje homotopia $G: X \times I \rightarrow S^n$ zapoczątkowana odwzorowaniem f , będąca przedłużeniem homotopii H , tj. taka, że

$$G|_{A \times I} = H \quad \text{oraz} \quad G(x, 0) = f(x) \quad \text{dla } x \in X.$$

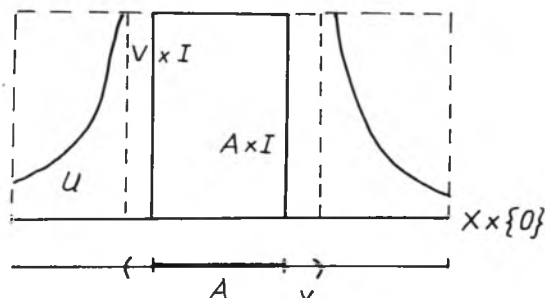
D o w ó d. Homotopia $H: A \times I \rightarrow S^n$ i odwzorowanie $f: X \rightarrow S^n$ określają — wobec $H(x, 0) = f(x)$ dla $x \in A$ — po zesztukowaniu jedno odwzorowanie ciągle $F: X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow S^n$ określone wzorami

$$F(x, t) = \begin{cases} H(x, t) & \text{dla } x \in A \text{ i } 0 \leq t \leq 1 \\ f(x) & \text{dla } x \in X \text{ i } t = 0. \end{cases}$$

⁽⁶⁾ K. Borsuk, *Sur le prolongement des transformations continues*, Fundamenta Mathematicae 28 (1937), 99—110.

Twierdzenie o przedłużaniu homotopii pozostaje prawdziwe przy założeniu jedynie normalności przestrzeni X , czego dowiódł M. Starbird, *Products with a compact factor*, General Topology and its Applications 6 (1976), 297—303, ale dowód się utrudnia. Jeśli założyć więcej, a mianowicie, że przestrzeń $X \times I$ jest normalna, to dowód jest prostą adaptacją z przypadku metrycznego. Normalność produktu $X \times I$ nie wynika z normalności przestrzeni X ; M. E. Rudin, *A normal space X for which $X \times I$ is not normal*, Fundamenta Mathematicae 73 (1971), 179—186.

Podzbiór $B = X \times \{0\} \cup A \times I$ produktu $X \times I$ jest jego podzbiorem domkniętym. Dowód będzie polegał na przedłużeniu odwzorowania F na całe $X \times I$.



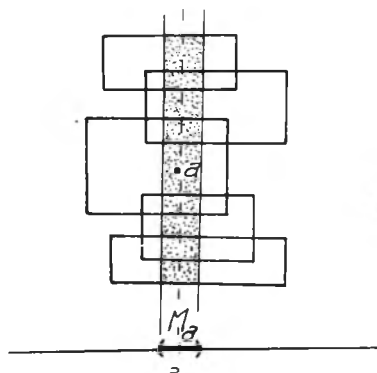
Rys. 85. Przedłużanie homotopii

Na mocy jednego z wniosków twierdzenia Tietzego (patrz *Aneks*, s. 64) odwzorowanie F ma przedłużenie na podzbiór otwarty U produktu $X \times I$. Niech $F' : U \rightarrow S^n$ będzie tym przedłużeniem.

Istnieje podzbiór V przestrzeni X zawierający zbiór A taki, że $V \times I \subset U$.

Aby to udowodnić, weźmy pod uwagę dla dowolnego a ze zbioru A i dowolnego t z odcinka I otoczenie punktu (a, t) w $X \times I$ postaci $N \times W$, zawarte w U , gdzie N jest otoczeniem punktu a w X , a W przedziałem odcinka I będącym otoczeniem punktu t w I . Zbiory otwarte $N \times W$ pokrywają odcinek $\{a\} \times I$. Ze zwartości odcinka wynika, że skończona ilość zbiorów $N \times W$ pokrywa $\{a\} \times I$.

Weźmy otoczenie M_a punktu a w przestrzeni X , będące przekrojem wspomnianej skończonej ilości otoczeń N . Produkt $M_a \times I$ jest zawarty w sumie wspomnianych zbiorów $N \times W$. Jest $M_a \times I \subset U$.



Rys. 86. Wykorzystanie zwartości odcinka

Suma V zbiorów M_a , $a \in A$, jest zbiorem otwartym w X takim, że $A \subset V$ i $V \times I \subset U$.

Na mocy lematu Urysohna (patrz *Aneks*, s. 63) istnieje funkcja ciągła $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$ taka, że $\varphi(x) = 1$ dla $x \in A$ i $\varphi(x) = 0$ dla $x \in X - V$.

Punkty $(x, t\varphi(x))$, gdzie $x \in X$ i $0 \leq t \leq 1$, leżą wszystkie w zbiorze $V \times I \cup X \times \{0\}$, a więc w zbiorze U będącym dziedziną odwzorowania F' . Stąd, możliwość określenia odwzorowania

$$G(x, t) = F'(x, t\varphi(x)) \quad \text{dla} \quad x \in X$$

i $0 \leq t \leq 1$, które jest zapowiedzianą homotopią $G : X \times I \rightarrow S^n$. Mamy bowiem:

$$G(x, 0) = F'(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$$

dla $x \in X$, oraz

$$G(x, t) = F'(x, t\varphi(x)), \quad F'(x, t) = H(x, t)$$

dla $x \in A$ i $0 \leq t \leq 1$.

Twierdzenie. *Jeśli A jest podzbiorem domkniętym przestrzeni metrycznej X i $f: A \rightarrow S^n$ jest odwzorowaniem nieistotnym, to f można w sposób ciągły przedłużyć na całą X .*

D o w ó d. Niech $H: A \times I \rightarrow S^n$ będzie istniejącą na mocy założenia homotopią łączącą odwzorowanie f z odwzorowaniem stałym $H(x, 1) = c$, gdzie $x \in A$, a c jest ustalonym punktem sfery S^n . To odwzorowanie stałe ma przedłużenie do odwzorowania stałego, określonego na całym X . Na mocy lematu o przedłużaniu homotopii istnieje przedłużenie homotopii H do homotopii

$$G: X \times I \rightarrow S^n,$$

która dla $t=1$ jest odwzorowaniem stałym (w punkt c). Niech $g: X \rightarrow S^n$ będzie dane wzorem

$$g(x) = G(x, 0) \quad \text{dla } x \in X.$$

Dla $x \in A$ dostajemy $g(x) = G(x, 0) = H(x, 0) = f(x)$, co znaczy, że odwzorowanie g jest przedłużeniem odwzorowania f na X .

W szczególności, odwzorowanie nieistotne $S^n \rightarrow S^n$ ma zawsze przedłużenie do odwzorowania $Q^{n+1} \rightarrow S^n$. Wynika stąd

Wniosek. *Odwzorowanie nieistotne sfery S^n w siebie ma punkt stały.*

Dla dowodu, niech $f: S^n \rightarrow S^n$ będzie odwzorowaniem nieistotnym. Przedłużmy je — w myśl poprzedzającej uwagi — do odwzorowania ciągłego $g: Q^{n+1} \rightarrow S^n$. Odwzorowanie g ma, na mocy twierdzenia Brouwera, punkt stały. Ten punkt stały leży na S^n , bo $g(Q^{n+1}) \subset S^n$. Jest to więc punkt stały odwzorowania f .

Wniosek. *Antypodyzm sfery, tj. odwzorowanie φ dane wzorem $\varphi(x) = -x$, jest istotne.*

Twierdzenie. *Jeśli $g: Q^n \rightarrow Q^n$ jest odwzorowaniem ciągłym takim, że $g|_{S^{n-1}}$ jest odwzorowaniem istotnym $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, to $g(Q^n) = Q^n$.*

D o w ó d. Jeřliby $g(Q^n) \neq Q^n$, to istniałaby retrakcja $r: g(Q^n) \rightarrow S^{n-1}$. Odwzorowanie $r \circ g: Q^n \rightarrow S^{n-1}$ byłoby przedłużeniem na Q^n odwzorowania $g|_{S^{n-1}}$, ale $g|_{S^{n-1}}$ jest, na mocy założenia, istotne, i przedłużenia na Q^n mieć nie może (ściągłość Q^n).

Twierdzenie zawiera w sobie dwa wcześniej znane twierdzenia (twierdzenie 1 z wykładu 3, s. 75), w którym zakładało się, że $g|_{S^{n-1}}$ jest tożsamością, oraz stwierdzenie zawarte we wniosku na s. 105 z tego samego wykładu, w którym $g|_{S^{n-1}}$ było antypodyzmem. Przypomnijmy, że zarówno tożsamość, jak i antypodyzm są odwzorowaniami istotnymi.

* * *

Twierdzenia o punktach incydencji.

Jeřli f i g są odwzorowaniami określonymi na tej samej przestrzeni X o wartościach w tej samej dla obu odwzorowań przestrzeni, to punkt x przestrzeni X taki, że $f(x) = g(x)$, jest nazywany *punktem incydencji* odwzorowań f i g . Punkty stałe to punkty incydencji odwzorowania z tożsamością.

Jest łatwo dowieřć, że

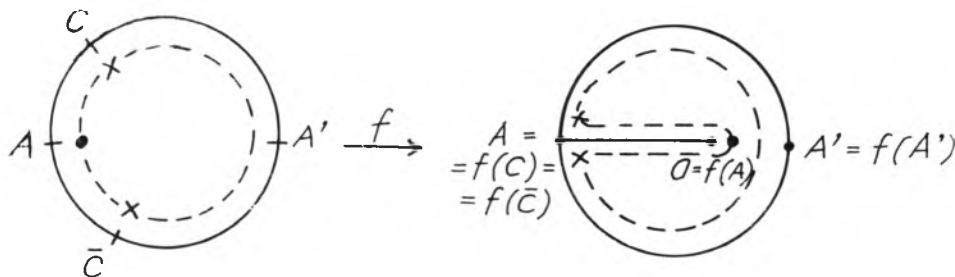
Odwzorowania ciagle z kontinuum na odcinek domknięty prostej, z których co najmniej jedno jest odwzorowaniem „na”, mają punkt incydencji.

Analogiczne stwierdzenie dla Q^n , $n \geq 2$, nie jest prawdziwe.

Przykład (por. Holsztyński, 1967)⁽⁷⁾. Niech α będzie odwzorowaniem okręgu S na tenże okrąg z dostawionym doń odcinkiem AO řrednicy AA' będącym rezultatem sklejenia symetrycznych względem A punktów łuku CAC' okręgu S takim, że

$$\alpha(A') = A', \quad \alpha(C) = \alpha(\bar{C}) = A \quad \text{i} \quad \alpha(A) = 0.$$

Tak określone odwzorowanie α może być traktowane jako część odwzorowania f koła K ograniczonego przez S na siebie, w którym — poza wspomnianymi — řadne juź punkty nie skleją się. Sposób, w jaki f przekształca koło K na siebie, pokazuje rys. 87.



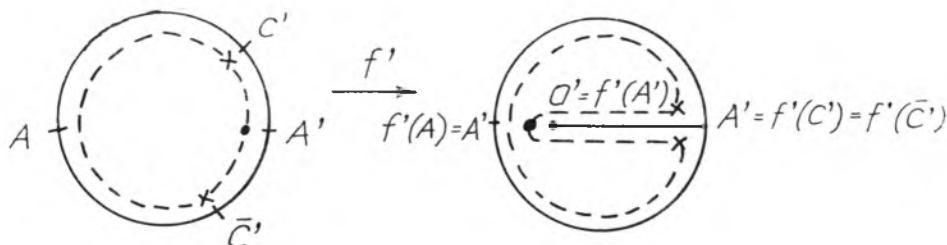
Rys. 87. Konstrukcja odwzorowania f

⁽⁷⁾ W. Holsztyński, *Universal mappings and fixed point theorems*. Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences 15 (1967), 433—438.

Deformując odpowiednio homeomorficznie obraz, można przyjąć, że f przeprowadza AA' na OA' liniowo oraz, że punkty leżące ponad średnicą AA' przechodzą na punkty ponad tą średnicą (to samo dotyczy leżenia poniżej AA') z wyjątkiem punktów łuku CAC' , które przechodzą na punkty odcinka AO .

Niech f' będzie, analogicznie do f , określonym odwzorowaniem koła K na siebie, w którym rolę punktu A odgrywa punkt A' średnicy AA' , rolę punktu O zaś punkt O' na AA' , a rolę łuku CAC' łuk $C'A'C'$ położony symetrycznie wokół A' .

Nałożmy na odwzorowanie f' symetrię „—” względem średnicy AA' . Otrzymujemy odwzorowanie $g: K \rightarrow K$ o własnościach analogicznych do poprzedniego, z tym że punkty leżące ponad średnicą AA' są przeprowadzane na punkty leżące poniżej AA' i *vice versa* — z wyjątkiem punktów łuku $C'A'C'$, które są przeprowadzane na punkty odcinka $A'O'$ średnicy $A'A$ (por. rys. 88).



Rys. 88. Konstrukcja odwzorowania g

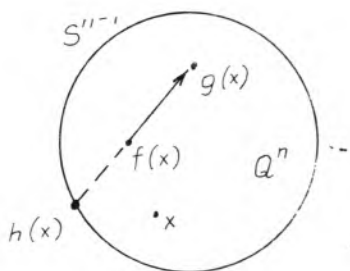
Punkty x takie, że $f(x) = g(x)$, mogą leżeć na łukach CAC' i $C'A'C'$, ale jeśli te łuki dobrać tak, by były rozłączne, to tego rodzaju punktów nie będzie; mogłyby też leżeć na średnicy AA' , ale $f(AA') = OA'$ i $g(A'A) = O'A$ i jeśli punkty O i O' dobrać tak, by OA' i $O'A$ były rozłączne, to i tego rodzaju punkty incydencji dla f i g również się nie pojawiają.

Przy spełnieniu wymienionych dodatkowych warunków jest więc zawsze $f(x) \neq g(x)$.

Twierdzenie (Łokuciewski, 1957)⁽⁸⁾ (por. Dugundji-Granas, s. 50). *Jeśli $g: Q^n \rightarrow Q^n$ jest odwzorowaniem takim, że $g|S^{n-1}: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ i $g|S^{n-1}$ jest odwzorowaniem istotnym jako odwzorowanie S^{n-1} w S^{n-1} , to g ma punkty incydencji z każdym odwzorowaniem $f: Q^n \rightarrow Q^n$.*

⁽⁸⁾ Lemat i dalsze twierdzenia pochodzą z pracy O. W. Łokuciewskiego, *Odná teorema o nepodvižnoj toczke*, Uspiechi Matematyčeskich Nauk 12, wyp. 3 (75) (1957), 171—172. Twierdzenia te można znaleźć również w kilku innych późniejszych pracach: Helga Schirmer, *A Brouwer type coincidence theorem*, Canadian Mathematical Bulletin 9 (1966), 443—447; M. M. Dodson, *A Brouwer type coincidence theorem and the fundamental theorem of algebra*, Canadian Mathematical Bulletin 27 (1984), 478—480.

Dowód. Jeśli byłyby stałe $f(x) \neq g(x)$, to odwzorowanie $h: Q^n \rightarrow S^{n-1}$ przyporządkowujące punktowi x kuli Q^n punkt sfery S^{n-1} leżący na przedłużeniu wstecz wektora od $f(x)$ do $g(x)$, byłoby po obcięciu do S^{n-1} nieistotne na mocy ostatniego twierdzenia (bo $h(Q^n)$ nie pokrywa Q^n). Ale $h(x) = g(x)$ dla $x \in S^{n-1}$. Sprzeczność, ponieważ zakładaliśmy, że $g|S^{n-1}$ jest odwzorowaniem istotnym $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$.



Rys. 89. Twierdzenie Łokuciewskiego

Twierdzenie ma wzmocnienie wzorowane na twierdzeniu Bohla (por. wykład 3, s. 104).

Jeśli f i g są odwzorowaniami ciągłymi $Q^n \rightarrow E^n$, przy czym $g(Q^n) \supset Q^n$ i $g|S^{n-1}$ jest odwzorowaniem istotnym $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ i $f(x) - g(x) \neq \lambda g(x)$ dla $x \in S^{n-1}$ i $\lambda > 0$, to $f(x) = g(x)$ dla pewnego x , $x \in Q^n$.⁽⁹⁾

Przypadek Bohla: $g =$ tożsamość.

Odwzorowanie ciągłe $f: X \rightarrow Q^n$ jest nazywane *odwzorowaniem istotnym na kulę* Q^n , jeśli odwzorowanie $f|f^{-1}(S^{n-1}): f^{-1}(S^{n-1}) \rightarrow S^{n-1}$ nie ma przedłużenia na X , tj. jeśli nie istnieje odwzorowanie ciągłe $f': X \rightarrow S^{n-1}$ takie, że $f'(x) = f(x)$ dla $x \in f^{-1}(S^{n-1})$. Odwzorowanie istotne $f: X \rightarrow Q^n$ jest odwzorowaniem „na” (w przeciwnym razie, biorąc retrakcję r zbioru $f(X)$ na S^{n-1} , odwzorowanie $r \circ f: X \rightarrow S^{n-1}$ byłoby przedłużeniem odwzorowania $f|f^{-1}(S^{n-1})$ na X).

Jeśli $f: X \rightarrow Q^n$ jest odwzorowaniem istotnym na Q^n , to odwzorowanie $f|f^{-1}(S^{n-1})$ jest istotne jako odwzorowanie na S^{n-1} ; wynika to z twierdzenia będącego wnioskiem z twierdzenia o przedłużaniu homotopii.

Poprzednio rozważane odwzorowania $f: Q^n \rightarrow Q^n$, których obcięcia $f|S^{n-1}$ są odwzorowaniami istotnymi na S^{n-1} , są istotne w rozważanym tu sensie.

Jest tak, bo $S^{n-1} \subset f^{-1}(S^{n-1})$ i jeśliby odwzorowanie $f|f^{-1}(S^{n-1})$ miało przedłużenie na Q^n , to byłoby ono przedłużeniem na Q^n odwzorowania $f|S^{n-1}$. Istnienie tego rodzaju przedłużenia przeczyłoby istotności odwzorowania $f|S^{n-1}$ (jako odwzorowania S^{n-1} w S^{n-1}).

Odwzorowanie tożsamościowe na Q^n jest istotne; to stwierdzenie jest równoważne stwierdzeniu o nieistnieniu przedłużenia tożsamości $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ do odwzorowania $Q^n \rightarrow S^{n-1}$, tj. stwierdzeniu o istotności odwzorowania tożsamościowego na S^{n-1} .

Twierdzenie (Łokuciewski, Odná tieorema...). Jeśli $g: X \rightarrow Q^n$ jest odwzorowaniem istotnym, to ma punkty incydencji z każdym odwzorowaniem $f: X \rightarrow Q^n$.

⁽⁹⁾ S. Reich, *A Poincaré type coincidence theorem*, American Mathematical Monthly 81 (1974), 52—53.

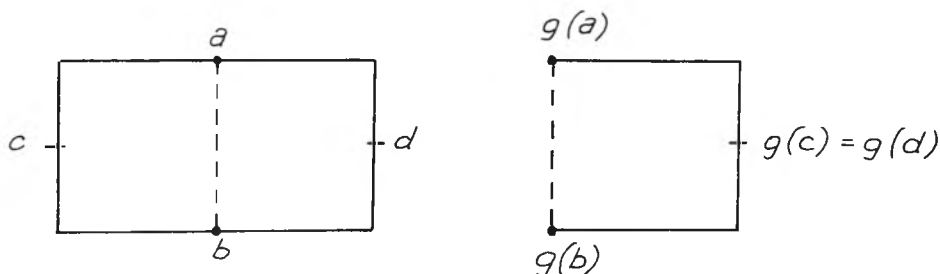
D o w ó d. Niech f i g będą odwzorowaniami ciągłymi przestrzeni X na Q^n . Niech g będzie odwzorowaniem istotnym. Jeśli byłoby stale $f(x) \neq g(x)$, to odwzorowanie $h: X \rightarrow S^{n-1}$ przyporządkowujące punktowi x przestrzeni X punkt sfery S^{n-1} leżący na przedłużeniu wektora od $f(x)$ do $g(x)$ byłoby po obcięciu do $g^{-1}(S^{n-1})$ równe odwzorowaniu g . Byłoby więc przedłużeniem odwzorowania $g|g^{-1}(S^{n-1})$ na całe X , wbrew temu, że g jest istotne.

Twierdzenie (Holsztyński, 1967; por. Dugundji-Granas, s. 50). *Jeśli $g: X \rightarrow Q^n$ jest odwzorowaniem mającym z każdym odwzorowaniem $X \rightarrow Q^n$ punkty incydencji, to g jest odwzorowaniem istotnym.*

D o w ó d. Przypuśćmy, że $g|g^{-1}(S^{n-1})$ ma przedłużenie do odwzorowania $f: X \rightarrow S^{n-1}$. Dla odwzorowania $-f: X \rightarrow S^{n-1} \subset Q^n$, gdzie „ $-$ ” oznacza antypodyzm, mamy stale $-f(x) \neq g(x)$, co przeczy założonej własności odwzorowania g .

Przykład. Odwzorowanie $g: I^2 \rightarrow I^2$, gdzie $I = \{t: 0 \leq t \leq 1\}$, sklejające punkty (x, y) i $(1-x, y)$, jest odwzorowaniem istotnym na I^2 (co się łatwo sprawdza). Wobec twierdzenia Łokuciewskiego ma ono punkty incydencji z każdym odwzorowaniem $I^2 \rightarrow I^2$.

Natomiast obcięcie $g| \partial I^2$ odwzorowania g do brzegu kwadratu, traktowane jako odwzorowanie ∂I^2 w ∂I^2 , nie jest istotne, odwzorowując ∂I^2 na łuk $f(a)f(c)f(b)$ (por. rys. 89) w ∂I^2 .



Rys. 90. Odwzorowanie g

Zatem, własność odwzorowania $g: Q^n \rightarrow Q^n$ (dotyczy to tylko $n \geq 2$), zapewniająca istnienie punktów incydencji z każdym odwzorowaniem $Q^n \rightarrow Q^n$, nie zapewnia istotności odwzorowania $g|S^{n-1}$ jako odwzorowania $S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, zakładając $g(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$, mimo że (na mocy ostatniego twierdzenia) zapewnia istotność odwzorowania g jako odwzorowania $Q^n \rightarrow Q^n$.

Zastosowania.

Twierdzenie Łokuciewskiego (1957, *Odna tieorema...*). *Jeśli przestrzeń metryczna zwarta ma dla każdego $\varepsilon > 0$ odwzorowanie istotne na kulę euklidesową, będące ε -odwzorowaniem (wymiar kuli zależy od ε), to ma własność punktu stałego.*

Dowód. Niech X będzie przestrzenią metryczną zwartą. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $g: X \rightarrow Q^n$ będzie ε -odwzorowaniem istotnym. Niech $f: X \rightarrow X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Na mocy ostatnio dowiedzionego twierdzenia, $g(x) = g(f(x))$ dla pewnego x .

Punkty x i $f(x)$ leżąc w przeciwobrazie tego samego punktu odwzorowania g , są w odległości $< \varepsilon$. Wobec dowolności ε , wnosimy o istnieniu punktu stałego dla f , na mocy twierdzenia z wykładu 3 (s. 106).

Odwzorowanie przypisujące punktowi $x = \{x_0, x_1, \dots\}$ kostki Hilberta punkt $\{x_0, \dots, x_n, 0, \dots\}$ kostki I^n jest odwzorowaniem istotnym na I^n i jest jednocześnie $(1/n)$ -odwzorowaniem (metryka w kostce Hilberta jest dana wzorem $d(x, y) = \sup \{(1/n) d(x_n, y_n) : n = 0, 1, \dots\}$). Stąd, dowiedzione twierdzenie stosuje się do kostki Hilberta. Wnoszemy więc: *kostka Hilberta ma własność punktu stałego*.

Tę własność kostki Hilberta znaleźliśmy już wcześniej z wykładu 3 (s. 106). Korzystaliśmy z tego, że użyte w tym dowodzie odwzorowanie na Q^n jest retrakcją.

Przypadek, kiedy $n = 1$, tj. ε -odwzorowań na odcinek, nie jest bez znaczenia.

Przestrzenie metryczne zwarte, które dla każdego $\varepsilon > 0$ mają ε -odwzorowania na odcinek, nazywa się *wężowymi*; przestrzenie te muszą być (oczywiście) spójne, są to więc *kontinua wężowe*⁽¹⁰⁾.

Z twierdzenia Łokuciewskiego wynika, biorąc pod uwagę to, że odwzorowania z kontinuuów na odcinek są zawsze istotne, że *kontinua wężowe mają własność punktu stałego*⁽¹¹⁾.

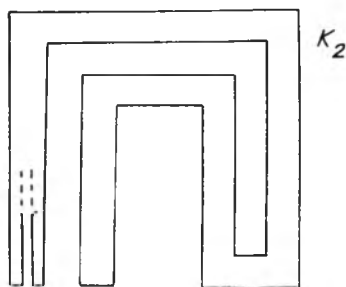
Przykładami kontinuuów wężowych są odcinek i sinusoida zagęszczona (sprawdzenie tego drugiego pomijamy). Mniej oczywisty przykład to opisane niżej kontinuum znane w literaturze jako *najprostsze kontinuum nierozkładalne* Knastera.

Z kwadratu K_0 , po podzieleniu go najpierw na 9 równych kwadratów (por. pierwszą z figur na rys. 91) usuwamy dwa dolne kwadraty ze środkowego pasa. Powstaje figura spójna domknięta (usuwamy kwadraty otwarte) K_1 mająca kształt wstęgi.

⁽¹⁰⁾ Kontinua wężowe można równoważnie określić jako takie, które dla każdego $\varepsilon > 0$ mają pokrycia zbiorami otwartymi U_1, \dots, U_k o średnicach $\leq \varepsilon$ takimi, że $U_i \cap U_j \neq \emptyset \Leftrightarrow |i - j| \leq 1$ (sąsiednie w numeracji i tylko takie się przecinają). Tego rodzaju pokrycia są nazywane *łańcuchami*. Nerw łańcucha jest łukiem łamanej, a metoda odwzorowań w nerw pokrycia (znana z poprzedniego wykładu) daje ε -odwzorowania pojawiające się w określeniu kontinuuów wężowych. Oczywiście, wymiar kontinuuów wężowych jest równy 1. Pojęcie pojawia się u Binga (1951); R. H. Bing, *Snake-like continua*, Duke Mathematical Journal 18 (1951), 653–663. Wcześniej pojawiło się u Waraszkiewicza (1936); Z. Waraszkiewicz, *O pokrewieństwie kontynuów*, Wiadomości Matematyczne 43 (1936), 1–57. Z. Waraszkiewicz dowiódł, że *kontinua wężowe są spłaszczalne*.

⁽¹¹⁾ Pierwszy dowód tego twierdzenia pochodzi z pracy O. H. Hamiltona, *A fixed point theorem for pseudo-arc and certain other metric continua*, Proceedings of the American Mathematical Society 2 (1951), 173–174.

Kwadraty pozostawione na tej wstęde dzielimy każdy na 9 równych kwadratów i ze wstęgi K_1 usuwamy kwadraty tego nowego podziału leżące w środkowym pasie wstęgi, wszystkie z wyjątkiem najniższego w prawym dolnym kwadracie, dzięki czemu wstęgi nie rozcinaamy. Powstaje wstęga K_2 (zwinęta już podwójnie), z którą postępujemy tak, jak ze wstęgą K_1 . Przekrój $K_0 \cap K_1 \cap K_2 \cap \dots$ tak budowanych wstęg jest zapowiedziąnym kontinuum. Wstęga K_n ma „szerokość” rzędu $1/3^n$. Otrzymane kontinuum leży w K_n i jego „rzut” na linię środkową wstęgi K_n (homeomorficzną z odcinkiem) jest $(1/3^n)$ -odwzorowaniem⁽¹²⁾.



Rys. 91. Kontinuum $K_0 \cap K_1 \cap K_2 \cap \dots$

* * *

Twierdzenie. Niech X będzie wielościannem i niech A będzie jego podzbiorem domkniętym. Niech $f: A \rightarrow S^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym.

Jeśli wymiar wielościannu X jest $\leq n$, to odwzorowanie f ma przedłużenie na całe X .

Jeśli wymiar wielościannu X jest $\leq n + 1$, to odwzorowanie f ma przedłużenie na zbiór postaci $X - S$, gdzie S jest zbiorem skończonym.

Dowód. Odwzorowanie f ma przedłużenie na pewien zbiór otwarty U zawierający A (wniosek z twierdzenia Tietzego, Aneks, s. 64). Jeśli wziąć dostatecznie drobną triangulację T wielościannu X , to można znaleźć wielościann $|K|$ złożony z jej sympleksów taki, że

$$A \subset |K| \subset U.$$

Niech $f: |K| \rightarrow S^n$ będzie obcięciem do $|K|$ wspomnianego przedłużenia odwzorowania f na U .

W oczywisty sposób można odwzorowanie f przedłużyć na wierzchołki triangulacji T , tj. na szkielet 0-wymiarowy triangulacji T .

Przez indukcję będziemy przedłużać teraz otrzymane odwzorowanie na wyżej wymiarowe szkielety triangulacji T .

Załóżmy, że odwzorowanie f przedłużyliśmy już na szkielet k -wymiarowy triangulacji T , gdzie $k < n$ (przy $n = 0$ twierdzenie jest trywialne). Wobec $k < n$ odwzorowanie to jest nieistotne (twierdzenie z tego wykładu, s. 128) na brzegu każdego sympleksu k -wymiarowego triangulacji T . Można je

⁽¹²⁾ Kontinuum opisane przez Janiszewskiego (1911); Z. Janiszewski (teza), *Sur les continus irréductibles entre deux points*, Paris 1911, na s. 36; w *Oeuvres choisies* Janiszewskiego, PWN, Warszawa 1962, s. 31—125. Od K_n nastera pochodzi inny opis tego kontinuum związany z budową 2-adyczną zbioru Cantora; por. *Topologie II* Kuratowskiego, s. 143.

zatem (na mocy twierdzenia ze s. 131) przedłużyć na ten sympleks (jeśli nie należał do K). W ten sposób odwzorowanie przedłuża się (sympleks za sympleksem) na cały szkielet k -wymiarowy triangulacji K .

Jeśli wymiar wielościanu X jest równy n , to na mocy przeprowadzonego rozumowania indukcyjnego dostajemy przedłużenie odwzorowania f na całe X , a więc pierwszą tezę twierdzenia.

Jeśli wymiar wielościanu X jest $\leq n + 1$ i Δ jest sympleksem $(n + 1)$ -wymiarowym triangulacji T , to pewne przedłużenie odwzorowania f jest określone na brzegu sympleksu Δ . Można je przedłużyć na sympleks Δ pozbawiony jednego z jego punktów. W ten sposób, biorąc pod uwagę to, że rozważanych sympleksów jest skończenie wiele, dostajemy drugą tezę twierdzenia.

Dodajmy, że dla wielościanów wymiaru $> n$ nie da się otrzymać lepszego rezultatu. Biorąc bowiem w tego rodzaju wielościanie sympleks Δ , $(n + 1)$ -wymiarowy, i brzeg $\partial\Delta$ tego sympleksu, widzimy, że odwzorowania tożsamościowego na $\partial\Delta$ nie można przedłużyć do odwzorowania $\Delta \rightarrow \partial\Delta$, tym bardziej do odwzorowania całego wielościanu w $\partial\Delta$. Brzeg sympleksu Δ — to przypomnijmy — jest homeomorficzny z S^n .

Wniosek⁽¹³⁾. *Wymiar — geometryczny — wielościanu jest równy n wtedy i tylko wtedy, gdy każde odwzorowanie ciągle z jego podzbioru domkniętego w sferę S^n ma przedłużenie na cały wielościan i gdy nie jest to już prawdą dla odwzorowań w sferę S^{n-1} .*

Wniosek. *Wielościany różniące się wymiarami — geometrycznymi — nie są homeomorficzne.*

Dzieje się tak dlatego, że różnią się własnością topologiczną sformułowaną w poprzednim wniosku.

Stwierdzenie zawarte w tym wniosku znaliśmy już wcześniej: *wielościany różniące się wymiarami geometrycznymi nie są homeomorficzne, ponieważ różnią się wymiarem pokryciowym (dim);* wykład 4, s. 114.

⁽¹³⁾ Stwierdzenie to ma wszakże szerszy zasięg: przenosi się na zakres przestrzeni metrycznych zwartych. Jedną z przesłanek dowodu jest wniosek z lematu faktoryzacyjnego (wykład 6, s. 148), według którego odwzorowania przestrzeni zwartych metrycznych wymiaru $< n$ w sferę S^n są nieistotne. Inną przesłanką jest twierdzenie, według którego, jeśli $\dim X \leq n$, to mając dwa podzbiory domknięte rozłączne A i B przestrzeni X , istnieje podzbiór domknięty C tej przestrzeni taki, że $\dim C \leq n - 1$, $X - C = G \cup H$, gdzie G i H otwarte i rozłączne, oraz $A \subset H$ i $B \subset G$. Jest to trudne twierdzenie otwierające drogę dla ujęcia pojęcia wymiaru indukcyjnie poprzez własności rozcinania (tzw. wymiar Ind). W pełnej ogólności twierdzenie można znaleźć np. w książce W. R. Inowa, *Topologie*, Berlin 1975, na s. 362, z odniesieniem do prac oryginalnych (s. 366).

A oto samo

Twierdzenie. *Jeśli A jest podzbiorem domkniętym przestrzeni metrycznej zwartej X wymiaru $\leq n$, to każde odwzorowanie $f: A \rightarrow S^n$ przedłuża się na X .*

Oba stwierdzenia razem prowadzą do wniosku, że jeśli X jest wielościanem, to $\dim X \leq n$ wtedy i tylko wtedy, gdy każde odwzorowanie w S^n z podzbioru domkniętego w X daje się przedłużyć na całe X .

Dowód. Zaczynamy od przedłużenia odwzorowania f na zbiór otwarty U zawierający A . Na mocy wspomnianego twierdzenia z teorii wymiaru, zastosowanego do zbiorów domkniętych A i $B = X - U$, istnieje zbiór domknięty C wymiaru $\leq n - 1$ taki, że $X - C = G \cup H$, G i H otwarte i rozłączne i takie, że $A \subset G$ i $X - U \subset H$. Oczywiście, $C \cup G \subset U$. Odwzorowanie $f|C$ przedłużamy na $C \cup H$ na mocy pierwszego ze wspomnianych twierdzeń. Sztukując to odwzorowanie z odwzorowaniem $f|C \cup G$, dostajemy zapowiedziane przedłużenie odwzorowania f na całe X .

WYKŁAD 6. Twierdzenia o rozcinianiu • Twierdzenie Borsuka o oddzieleniu punktu od nieskończoności • Twierdzenie Borsuka o rozcinianiu sfer • Twierdzenie Jordana-Brouwera • Jeszcze raz twierdzenie Brouwera o zachowaniu otwartości • Zbiór domknięty wymiaru $\leq n - 2$ nie rozcina sfery S^n

Przestrzenie euklidesowe są lokalnie spójne: kule otwarte tworzące bazę zbiorów otwartych w E^n są spójne. Stąd (wnioskowaliśmy już w ten sposób w wykładzie 1 w przypadku płaszczyzny):

(1) składowe zbiorów otwartych przestrzeni E^n są zbiorami otwartymi, więc obszarami.

Powiedzenie zatem, że zbiór domknięty A rozcina E^n , znaczy, że dopełnienie $E^n - A$ zbioru A ma rozbitcie na co najmniej dwa obszary (składowe zbioru $E^n - A$).

Kule otwarte (tworzące bazę) są zbiorami wypukłymi; korzystając z tego, nietrudno dowieść, że:

(2) każde dwa punkty obszaru przestrzeni E^n można w tym obszarze połączyć łamaną (por. dowód odpowiedniego twierdzenia w wymiarze 2 (dla płaszczyzny), wykład 1, s. 26).

Jeśli zbiór A jest zwarty (tj. domknięty i ograniczony), to jedna ze składowych dopełnienia $E^n - A$ zbioru A — i tylko jedna — jest nieograniczona: zbiór A zawiera się wtedy w pewnej kuli i punkty dopełnienia tej kuli tworzą zbiór spójny; leżą więc w jednej składowej. Kryterium należenia punktu do składowej nieograniczonej polega — wobec (2) — na istnieniu łamanej łączącej ten punkt z punktem poza wspomnianą kulą zawierającą zbiór A .

Dodajmy jeszcze, że brzeg każdej składowej dopełnienia zbioru domkniętego jest zawarty w tym zbiorze.

Twierdzenie Borsuka (o oddzielaniu punktu od nieskończoności, 1932)⁽¹⁾.
 Niech A będzie podzbiorem zwartym przestrzeni E^n . Punkt q leży w składowej ograniczonej zbioru A (jest oddzielony od nieskończoności przez A) wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie $f: A \rightarrow S^{n-1}$ dane wzorem

$$f(x) = (x - q)/|x - q|, \quad x \in A,$$

jest istotne.

Przyjmijmy, co nie zmniejsza ogólności, że $q = 0$.

Odwzorowanie, o którym mowa w twierdzeniu, ma wtedy postać

$$(3) \quad f(x) = x/|x|, \quad x \in A.$$

Przyjmijmy również, że zbiór A jest zawarty w kuli $|x| \leq 1$.

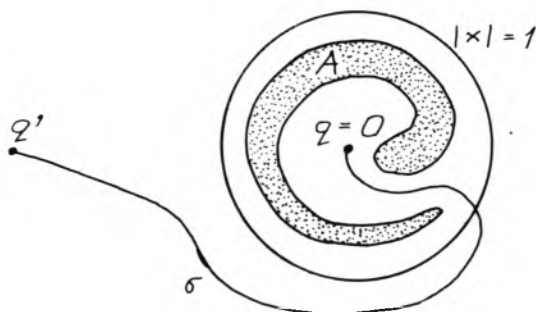
Dowód twierdzenia. 1. Załóżmy, że q leży w składowej nieograniczonej zbioru $E^n - A$. Rozważmy drogę $\sigma: I \rightarrow E^n - A$ łączącą punkt $q = 0 = \sigma(0)$ z punktem $q' = \sigma(1)$ leżącym poza kulą $|x| \leq 1$. Jest $|q'| > 1$. Rozważmy odwzorowanie $H: A \times I \rightarrow S^{n-1}$ dane wzorem

$$H(x, t) = (x - \sigma(t))/|x - \sigma(t)|, \quad x \in A, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Jest to homotopia łącząca odwzorowanie f dane wzorem (3) z odwzorowaniem $f': A \rightarrow S^{n-1}$ danym wzorem:

$$f'(x) = (x - q')/|x - q'|, \quad x \in A.$$

Odwzorowanie f' jest nieistotne, ponieważ jego wartości nie pokrywają całej sfery S^{n-1} ; nie może ono przyjmować na przykład wartości $q'/|q'|$, co jest zrozumiałe geometrycznie (por. rys. 92).



Rys. 92. Twierdzenie Borsuka: punkt q leży w składowej nieograniczonej dopełnienia zbioru A

⁽¹⁾ K. Borsuk, *Über Schnitte der n -dimensionalen Euklidischen Räume*, Mathematische Annalen 106 (1932), 239—248; w *Collected Papers*, t. I, s. 130—139.

Potwierdza to również rachunek.

Równość $(x - q)/|x - q| = q'/|q'|$ prowadzi bowiem do równości $(x - q)|q'| = q'|x - q|$, a ta z kolei do $q'(|x - q'| + |q'|) = x|q'|$, a w rezultacie do

$$|x - q'| + |q'| = |x|,$$

co przy $|x| < |q'|$ (przypomnijmy, że $|q'| > 1$, $x \in A$ i że zbiór A jest zawarty w kuli $|x| \leq 1$) jest niemożliwe.

2. Załóżmy, że punkt $q = 0$ leży w składowej ograniczonej, którą oznaczymy przez U — zbioru $E^n - A$. Przypuśćmy — *a contrario* — że odwzorowanie f dane wzorem (3) jest nieistotne. Na mocy twierdzenia z poprzedniego wykładu, wniosku z twierdzenia o przedłużaniu homotopii, odwzorowanie f ma przedłużenie na zbiór $A \cup U$. Ponieważ $0 \in U$ i brzeg zbioru $A \cup U$ jest zawarty w zbiorze A , na którym odwzorowanie jest określone wzorem (3), odwzorowanie określone dotąd na $A \cup U$ można przedłużyć wzorem (3), tj. wzorem $x/|x|$, na resztę punktów przestrzeni E^n . Ponieważ zbiór A wraz ze składową U leży w kuli $|x| \leq 1$, więc przedłużone odwzorowanie jest dane na sferze $|x| = 1$ wzorem $x/|x|$, czyli jest tam tożsamością. Dostaliśmy zatem odwzorowanie kuli $|x| \leq 1$ w sferę $|x| = 1$, tożsamościowe na tej sferze. Sprzeczność z twierdzeniem o niemożliwości retrakcji kuli na brzeg.

Twierdzenie Borsuka o rozcinaniu (1932)⁽²⁾. Podzbiór zwarty przestrzeni euklidesowej E^n , $n \geq 2$, rozcina E^n wtedy i tylko wtedy, gdy ma odwzorowanie istotne w S^{n-1} .

Uwaga przed dowodem. Założenie, że $n \geq 2$, jest potrzebne do wynikania dającego istnienie odwzorowania istotnego. Dla wynikania odwrotnego założenie to jest niepotrzebne, bo prosta jest rozcinana przez każdy ze swoich podzbiorów ograniczonych.

Dowód. 1. Niech A będzie podzbiorem domkniętym i ograniczonym przestrzeni E^n rozcinającym E^n . Niech q będzie punktem ($n \geq 2$) leżącym w składowej ograniczonej zbioru $E^n - A$. Odwzorowanie określone dla x ze zbioru A wzorem (1) jest — por. poprzednie twierdzenie — odwzorowaniem istotnym w S^{n-1} .

2. Niech A będzie podzbiorem domkniętym i ograniczonym przestrzeni E^n nie rozcinającym E^n . Dla dowodu wygodniej będzie przyjąć, że przestrzeń E^n jest sferą S^n usuniętym z niej punktem. Zbiór A jest wtedy podzbiorem domkniętym właściwym sfery S^n rozcinającym tę sferę.

⁽²⁾ K. Borsuk, tamże. Twierdzenie to wynika również z twierdzenia Aleksandrowa, *Mathematische Annalen*, 106 (1932), s. 161—238 (samo twierdzenie na s. 226); por. tłum. ros. (z komentarzem) w zbiorze prac *Teorija razmiernosti i smieżnyje woprosy; stat'ji obszczego charaktiera* P. S. Aleksandrowa, Moskwa 1978, s. 60—154. Aleksandrow sformułował i dowiódł swego twierdzenia w konwencji teorii homologii.

Niech $f: A \rightarrow S^{n-1}$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Pokażemy, że f jest nieistotne. W tym celu dla odwzorowania f znajdziemy przedłużenie ciągłe, które będzie nieistotne.

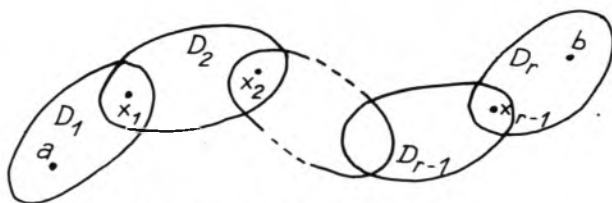
Na mocy twierdzenia z poprzedniego wykładu (s. 137) odwzorowanie f można przedłużyć do odwzorowania ciągłego określonego wszędzie na S^n , z wyjątkiem pewnego skończonego zbioru punktów.

Niech F będzie tym zbiorem skończonym, a $g: S^n - F \rightarrow S^{n-1}$ wspomnianym przedłużeniem.

Przedłużenie g zmodyfikujemy teraz, zastępując je takim, którego zbiór punktów nieokreśloności redukuje się do jednego punktu.

Wystarczy wskazać sposób, w jaki można ilość punktów nieokreśloności zmniejszyć o jeden.

Weźmy w tym celu dwa punkty a i b zbioru F . Istnieje ciąg kul domkniętych D_1, \dots, D_r takich, że każde dwie, D_i i D_j , są rozłączne, jeśli wskaźniki i i j nie są sąsiednie, a przecinają się wewnątrzami w przeciwnym przypadku; niech ponadto punkt a leży we wnętrzu D_1 nie leżąc w D_2 , a punkt b we wnętrzu D_r nie leżąc w D_{r-1} i niech każda z kul omija zbiór A , a także punkty zbioru F poza wspomnianymi punktami a i b .



Rys. 93. Łańcuch kul od a do b

Weźmy punkt x_1 we wnętrzu przekroju $D_1 \cap D_2$ i rozważmy retrakcję r_1 zbioru $D_1 - \{x_1\}$ na brzeg D_1 . Odwzorowanie $g_1 = g \circ r_1$ jest określone wszędzie poza zbiorem $F \cup \{x_1\} - \{a\}$ i stanowi przedłużenie odwzorowania f . Bierzymy z kolei punkt x_2 we wnętrzu przekroju $D_2 \cap D_3$ i retrakcję r_2 zbioru $D_2 - \{x_2\}$ na brzeg D_2 . Odwzorowanie $g_2 = g_1 \circ r_2$ jest określone wszędzie poza zbiorem $F \cup \{x_2\} - \{a\}$ i jest przedłużeniem odwzorowania f .

Postępując tak dalej, dojdziemy po $r-1$ krokach do przedłużenia g_{r-1} odwzorowania f , określonego wszędzie poza zbiorem $F \cup \{x_{r-1}\} - \{a\}$, a w następnym kroku do przedłużenia odwzorowania F określonego wszędzie poza $F \cup \{b\} - \{a\}$, więc poza zbiorem $F - \{a\}$.

Powtarzając to postępowanie, dostajemy przedłużenie do odwzorowania f określonego na sferze S^n pozbawionej jednego punktu, a więc do odwzorowania nieistotnego, bo sfera bez punktu jest przestrzenią ściągłą. Homotopia, która łączy wspomniane przedłużenie z odwzorowaniem w punkt, po ograniczeniu jej do punktów zbioru A , łączy odwzorowanie f z odwzorowaniem w punkt.

Dowodzone twierdzenie orzeka między innymi i to, że fakt rozcinania przez zbiór zwarty przestrzeni euklidesowej danego wymiaru zależy jedynie od typu topologicznego zbioru⁽³⁾. Tego dotąd nie wiedzieliśmy.

Wiedząc, że S^{n-1} ma odwzorowanie istotne w S^{n-1} lub to, że w położeniu zwykłym $|x| = 1$ sfera S^{n-1} rozcina E^n , dostajemy jako wniosek:

Twierdzenie Jordana-Brouwera⁽⁴⁾. *Zbiór homeomorficzny ze sferą S^{n-1} rozcina E^n .*

Dodajmy, że nie jest to *pełne* twierdzenie Jordana-Brouwera, które orzeka, że są tylko dwie składowe w dopełnieniu i że zbiór homeomorficzny ze sferą S^{n-1} jest brzegiem każdej z nich. Tę drugą tezę pokażemy jeszcze w tym wykładzie. Pierwszej dowiedzimy w przypadku $n = 2$ (płaszczyzna) w następnym wykładzie; dowód jej w wyższych wymiarach wymagałby rozbudowania metod⁽⁵⁾.

Wśród wniosków z twierdzenia Borsuka odnotujmy jeszcze i ten, że *obrazy homeomorficzne kul euklidesowych nie rozcinają przestrzeni euklidesowych* (bo kule euklidesowe są przestrzeniami ściągальnymi. W szczególności, *łuk nie rozcina płaszczyzny*).

Wielościan wymiaru $\leq n - 2$ nie rozcina E^n , bo każde odwzorowanie takiego wielościanu w S^{n-1} jest (jak wiemy z wykładu 5, s. 128) nieistotne.

Następujące twierdzenie (*Theory of retracts* B o r s u k a, s. 14) pozostawione jest bez dowodu.

Ilość składowych dopełnienia do E^n zbioru homeomorficznego z S^{n-1} jest skończona.

Ważnym dopełnieniem twierdzenia Jordana-Brouwera jest:

Twierdzenie. *Żaden podzbiór zwarty przestrzeni E^n , $n \geq 2$, homeomorficzny z podzbiorem właściwym sfery S^{n-1} , nie rozcina E^n .*

D o w ó d. Niech A będzie podzbiorem zwartym przestrzeni E^n homeomorficznym z podzbiorem B , $B \neq S^{n-1}$, sfery S^{n-1} . Niech $f: B \rightarrow S^{n-1}$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Istnieje kula Q^{n-1} zawarta w S^{n-1} i zawierająca B . Na mocy ostatniego twierdzenia z wykładu 5 (s. 137) odwzorowanie f można przedłużyć w sposób ciągły do odwzorowania $Q^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$. To przedłużenie jest nieistotne, ponieważ kule są ściągальne. Stąd f jest odwzorowaniem nieistotnym. To wystarcza, by na mocy twierdzenia Borsuka wnioskować o nierozcinaniu przestrzeni E^n przez zbiór A .

⁽³⁾ To, że własność rozcinania płaszczyzny przez zbiór zwarty zależy jedynie od typu topologicznego zbioru, zauważył pierwszy Brouwer w pracy *Beweis des Invarianz der geschlossenen Kurve*, *Mathematische Annalen* 72 (1912), s. 422—425; w *Collected Works*, t. II, s. 523—526.

⁽⁴⁾ L. E. J. Brouwer, *Beweis des Jordanschen Satzes für n-dimensionalen Raum*, *Mathematische Annalen* 71 (1912), s. 314—319; w *Collected Works*, t. II, s. 489—497.

⁽⁵⁾ Na przykład poprzez wprowadzenie pojęcia stopnia odwzorowania.

Dowiedzione twierdzenie można wypowiedzieć również i tak: *obrazy homeomorficzne sfery S^{n-1} są przekrojami nieprzywiedlnymi przestrzeni E^n ; nieprzywiedlnymi w tym znaczeniu, że ich podzbiory domknięte właściwe już nie rozcinają E^n .*

Wniosek. *Obraz homeomorficzny sfery S^{n-1} położony w E^n , $n \geq 2$, jest brzegiem każdego z obszarów, na jakie rozcina E^n .*

D o w ó d. Niech X będzie obrazem homeomorficznym sfery S^{n-1} położonym w E^n . Niech G będzie składową zbioru $E^n - X$. Brzeg składowej G rozcina E^n i jest podzbiorem domkniętym zbioru X . Na mocy poprzedniego twierdzenia ten brzeg wypełnia cały zbiór X .

Mając (niepełne) twierdzenie Jordana-Brouwera i wiedząc, że Q^n nie rozcina E^n , w nietrudny sposób uzyskuje się twierdzenie o zachowaniu otwartości, którego wcześniej dowiedliśmy, posługując się twierdzeniem Spernera o zamocowaniu (wykład 3, s. 88).

Twierdzenie Brouwera o zachowaniu otwartości⁽⁶⁾. *Podzbiór przestrzeni E^n homeomorficzny z podzbiorem otwartym tej przestrzeni jest jej podzbiorem otwartym.*

D o w ó d. Niech U będzie podzbiorem otwartym przestrzeni E^n . Niech V będzie podzbiorem przestrzeni E^n homeomorficznym z U . Niech h będzie homeomorfizmem U na V .

Niech q będzie punktem zbioru V . Dowód zakończymy, jeśli znajdziemy zbiór otwarty w E^n zawarty w V , do którego będzie należał punkt q .

Weźmy w tym celu punkt p w zbiorze U taki, że $h(p) = q$. Niech Q^n będzie kulą (domkniętą) o środku w punkcie p , zawartą w U . Niech S^{n-1} będzie brzegiem kuli Q^n . Z reguł rachunku zbiorów dostajemy

$$(4) \quad E^n - h(S^{n-1}) = (E^n - h(Q^n)) \cup h(Q^n - S^{n-1}).$$

Oba składniki sumy po prawej stronie tego wzoru są zbiorami spójnymi. Zbiór $E^n - h(Q^n)$ jest spójny, bo zbiór $h(Q^n)$, jako obraz homeomorficzny kuli, nie rozcina E^n . Zbiór $h(Q^n - S^{n-1})$ jest spójny jako obraz ciągły zbioru spójnego.

Zbiór $E^n - h(S^{n-1})$, z lewej strony wzoru, jest niespójny, bo $h(S^{n-1})$, jako obraz homeomorficzny sfery S^{n-1} , rozcina przestrzeń E^n . Mamy więc:

⁽⁶⁾ To, że twierdzenie o zachowaniu otwartości można dostać z (niepełnego) twierdzenia Jordana-Brouwera, było wiadomo, zanim jeszcze twierdzenie Jordana-Brouwera zostało dowiedzione; idea między innymi pochodziła od Baire'a; por. komentarz na s. 435—445 w t. II *Collected Works Brouwera*.

$$E^n - h(S^{n-1}) = G \cup H,$$

gdzie G i H są zbiorami niepustymi, rozłącznymi i otwartymi w $E^n - h(S^{n-1})$; są one otwarte również w E^n .

Składniki prawej strony wzoru (4), jako spójne, zawierają się, każdy w innym (wynika to z niepustości zbiorów G i H), w zbiorach G i H . Są równe tym zbiorom, bo w sumie dają $G \cup H$.

Wynika stąd w szczególności, że zbiór $h(Q^n - S^{n-1})$, jako równy jednemu ze zbiorów G i H , jest otwarty. Jest to zapowiedziane otoczenie, otwarte w E^n , punktu q zawarte w V .

Jeśli do krzywej zwykłej zamkniętej dołączy się łuk mający z nią jeden punkt wspólny, to nie rozetnie on żadnej składowej dopełnienia tej krzywej do płaszczyzny.

Korzystaliśmy z tego przy okazji wyprowadzania wzoru Eulera. W dowolnym wymiarze (niekoniecznie 2) mamy:

Twierdzenie. *Jeśli zbiory zwarte A i B nie rozcinają przestrzeni E^n i ich przekrój $A \cap B$ jest jednopunktowy, to ich suma $A \cup B$ nie rozcina przestrzeni E^n .*

Dowód. Niech p będzie (jedynym) punktem wspólnym zbiorów A i B . Niech $f: A \cup B \rightarrow S^{n-1}$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Pokażemy, że jest nieistotne, co zakończy dowód.

Odwzorowanie $f|A: A \rightarrow S^{n-1}$ jest nieistotne, bo A nie rozcina E^n . Rozważmy homotopię $F: A \times [0,1] \rightarrow S^{n-1}$ zaczynającą się ($t=0$) odwzorowaniem $f|A$ i kończącą się odwzorowaniem stałym. Tę homotopię przedłużmy (lemat o przedłużaniu homotopii) do homotopii $G: (A \cup B) \times [0,1] \rightarrow S^{n-1}$ zaczynającej się odwzorowaniem f . Odwzorowanie $g: A \cup B \rightarrow S^{n-1}$, którym ta homotopia się kończy ($t=1$), jest stałe na A (wartością stałą jest $g(p) = F(p, 1)$). Odwzorowanie $g|B$ jest nieistotne, ponieważ B nie rozcina E^n . Weźmy więc pod uwagę homotopię $H: B \times [1,2] \rightarrow S^{n-1}$ zaczynającą się ($t=1$) odwzorowaniem $g|B$ i kończącą się odwzorowaniem stałym. Tę homotopię przedłużmy do homotopii $K: (A \cup B) \times [1,2] \rightarrow S^{n-1}$ określonej na punktach (x, t) gdzie $x \in A$, wzorem $K(x, t) = H(p, t)$. Homotopia K łączy odwzorowanie g z odwzorowaniem stałym w punkcie $H(p, 2)$. Dosztukowanie homotopii K ($0 \leq t \leq 2$) do homotopii F , G i H (por. rys. 94) daje homotopię łączącą odwzorowanie f z odwzorowaniem stałym.

Zatem, dowolne odwzorowanie ciągłe z $A \cup B$ w S^{n-1} jest nieistotne, a więc $A \cup B$ nie rozcina przestrzeni E^n .

Dla prawdziwości twierdzenia nie wystarczyłoby założyć, że przekrój $A \cap B$ jest spójny, bo na przykład sferę S^2 , rozcinającą E^3 , można przedstawić jako

nie rozcina E^3 . Ta uwaga dotyczy również wyższych wymiarów. W przypadku płaszczyzny spójność przekroju wystarczy⁽⁷⁾.

Korzystając z dowiedzionego twierdzenia — za pomocą nietrudnej indukcji zaczynającej się od łuków — wnioskujemy, że *grafy nie zawierające krzywej zwykłej zamkniętej* (tj. nie mające obrazu homeomorficznego okręgu) *nie rozcinają płaszczyzny*. To, że grafy nie rozcinają E^n , jeśli $n > 2$ (nawet jeśli zawierają krzywe zwykłe zamknięte), wynika z ogólnych twierdzeń z końca tego wykładu.

Zbiory zwarte będące retraktami absolutnymi (AR-ami) nie rozcinają przestrzeni E^n , $n \geq 2$.

Dowód. Niech A będzie zwartym AR-em mieszczącym się w E^n , $n \geq 2$. Zbiór A jest retraktem przestrzeni E^n . Niech $r: E^n \rightarrow A$ będzie jedną z retrakcji. Niech $f: A \rightarrow S^{n-1}$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Mamy $f = (fr)|A$. Odwzorowanie f jest więc nieistotne, ponieważ przedłużenie $f \circ r$ tego odwzorowania na E^n jest nieistotne jako odwzorowanie z przestrzeni ścigalnej. O nierozcinaniu E^n przez A wnosimy na mocy kryterium Borsuka.

Dowodzi się⁽⁸⁾, że *dendryty*, tj. kontinua lokalnie spójne nie zawierające krzywych zwykłych zamkniętych, są AR-ami. Dendryty nie rozcinają więc E^n , $n \geq 2$, na mocy dowiedzionego stwierdzenia. W wykładzie 3 (s. 106) była poczyniona uwaga, że dendryty mają własność punktu stałego, co wynikało stąd, że AR-y mają własność punktu stałego.

Nierozcinanie płaszczyzny i własność punktu stałego zdają się towarzyszyć sobie w zakresie kontinuuów. Nie są to jednak własności równoważne. Kontinuum rozcinające płaszczyznę może mieć własność punktu stałego, czego przykładem jest „okrąg warszawski” (wykład 3, s. 107). Natomiast pytanie o to, czy kontinua nie rozcinające płaszczyzny mają własność punktu stałego, pozostaje dotąd nie rozstrzygnięte.

* * *

Twierdzenie, które teraz udowodnimy — nazwane lematem — można uważać za przeniesienie na szerszy zakres twierdzenia o aproksymacji symplecticznej.

⁽⁷⁾ Pierwsze twierdzenie Janiszewskiego; Z. Janiszewski, *O rozcinaniu płaszczyzny przez kontinua*, Prace Matematyczno-Fizyczne 26 (1913), s. 11—63; w *Oeuvres choisies* Zygmunta Janiszewskiego, Warszawa 1962, na s. 141—193. O tym twierdzeniu Janiszewskiego (i o drugim) będzie mowa w wykładzie 12.

⁽⁸⁾ Każde podkontinuum dendrytu (jest ono nadal dendrytem) jest retraktem tego dendrytu. Istnieje dendryt uniwersalny — *dendryt Ważewskiego* — tj. dendryt zawierający obrazy homeomorficzne wszelkich dendrytów. Ten dendryt uniwersalny stanowi rerakt kwadratu płaskiego, w którym jest budowany. Kwadrat płaski jest retraktem absolutnym. Biorąc to wszystko pod uwagę wnosimy, że dendryty są retraktami absolutnymi; *Topologie II* Kuratowskiego, s. 224—227 (dendryty), s. 259—264 (retrakty absolutne)

Lemat o faktoryzacji (por. S. Eilenberg, N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, 1952, X. 11). Niech X będzie przestrzenią zwartą. Niech $f: X \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem ciągłym w wielościan. Istnieje wielościan W' , którego wymiar nie przekracza $\dim X$, odwzorowanie ciągle $g: X \rightarrow W'$ i odwzorowanie $h: W' \rightarrow W$, symplecjalne względem danej triangulacji wielościanu W i pewnej triangulacji wielościanu W' , takie że dla każdego x z przestrzeni X wartości $f(x)$ i $h(g(x))$ leżą w jednym i tym samym sympleksie danej triangulacji wielościanu W .

W twierdzeniu o aproksymacji symplecjalnej przestrzeń X była wielościanem, g redukowało się do tożsamości, a wspomniana tu triangulacja wielościanu W' była pewnym podziałem danej triangulacji wielościanu X . Podobnie jak tam, aproksymacja $h \circ g$ odwzorowania f jest homotopijna z f . Homotopią jest odwzorowanie określone wzorem: $H(x, t) = t f(x) + (1 - t) h(g(x))$, $0 \leq t \leq 1$, $x \in X$.

Dowód Lematu. Niech T będzie daną triangulacją wielościanu W . Zbiory otwarte $f^{-1}(g_{W|T}|a)$, gdzie a przebiega wierzchołki triangulacji T , pokrywają X . Rozważmy pokrycie \mathcal{P} przestrzeni X zbiorami otwartymi, wpisane w pokrycie zbiorami $f^{-1}(g_{W|T}|a)$ i mające krotność $\leq \dim X + 1$. Niech $g: X \rightarrow |N(\mathcal{P})|$ będzie odwzorowaniem w bryłę $|N(\mathcal{P})|$ nerwu pokrycia \mathcal{P} (opisanym w wykładzie 4, s. 116). Bryła $|N(\mathcal{P})|$ jest zapowiedzianym wielościanem W' , a $N(\mathcal{P})$ jego zapowiedzianą triangulacją. Wymiar wielościanu W' nie przekracza $\dim X$.

Jeśli U jest wierzchołkiem nerwu $N(\mathcal{P})$ (U jest symbolem zarówno wierzchołka, jak i zbioru), to — jak wiemy (s. 116) — mamy inkluzję

$$g^{-1}(g_{W|N(\mathcal{P})}|U) \subset U.$$

Ale

$$U \subset f^{-1}(g_{W|T}|a)$$

dla pewnego wierzchołka a triangulacji T . Ustalmy jeden z tego rodzaju wierzchołków. Oznaczając ten wierzchołek symbolem $a(U)$, mamy

$$g^{-1}(g_{W|N(\mathcal{P})}|U) \subset f^{-1}(g_{W|T}|a(U)).$$

Przyporządkowanie $U \rightarrow a(U)$ wierzchołków triangulacji T wierzchołkom triangulacji $N(\mathcal{P})$ wyznacza odwzorowanie

$$h: |N(\mathcal{P})| \rightarrow W,$$

symplecjalne względem triangulacji $N(\mathcal{P})$ i T .

Stwierdzenie to wymaga dowodu. Mianowicie należy sprawdzić, że jeśli
148 U_1, \dots, U_k są wierzchołkami sympleksu należącego do $N(\mathcal{P})$, to $a(U_1), \dots, a(U_k)$

są wierzchołkami sympleksu w T , a więc że jeśli $gw_{|N(\mathcal{P})|} U_1 \cap \dots \cap gw_{|N(\mathcal{P})|} U_k \neq 0$, to $gw_{|T|} a(U_1) \cap \dots \cap gw_{|T|} a(U_k) \neq 0$; że tak jest, pokazuje inkluzja

$$\begin{aligned} f^{-1}(gw_{|T|} a(U_1)) \cap \dots \cap (gw_{|T|} a(U_k)) &= \\ &= f^{-1}(gw_{|T|} a(U_1)) \cap \dots \cap f^{-1}(gw_{|T|} a(U_k)) \supset \\ \supset g^{-1}(gw_{|N(\mathcal{P})|} U_1) \cap \dots \cap g^{-1}(gw_{|N(\mathcal{P})|} U_k) &= \\ &= g^{-1}(gw_{|N(\mathcal{P})|} U_1 \cap \dots \cap gw_{|N(\mathcal{P})|} U_k) \neq 0. \end{aligned}$$

Pokażemy, że dla każdego x ze zbioru X punkty $f(x)$ i $h(g(x))$ należą do jednego i tego samego sympleksu triangulacji T .

Niech $x \in X$ i niech U_1, \dots, U_k będą wszystkimi elementami pokrycia \mathcal{P} , do których należy x . Wśród współrzędnych barycentrycznych $\lambda_U(g(x))$ punktu $g(x)$ jedynie te, gdzie $U = U_j$, mogą być niezerowe. Mamy więc

$$g(x) = \lambda_{U_1}(g(x)) U_1 + \dots + \lambda_{U_k}(g(x)) U_k,$$

a w rezultacie

$$h(g(x)) = \lambda_{U_1}(g(x)) a(U_1) + \dots + \lambda_{U_k}(g(x)) a(U_k),$$

gdzie wszystkie liczby $\lambda_{U_j}(g(x))$ są nieujemne i ich suma jest równa 1.

Wobec $U_j \subset f^{-1}(gw_{|T|} a(U_j))$ mamy $f(x) \in gw_{|T|} a(U_j)$. Mamy więc $\lambda_{U_j}(f(x)) > 0$ dla wszelkich j . W zapisie punktu $f(x)$ zatem występują wszystkie współrzędne, które są w zapisie punktu $h(g(x))$ i być może jeszcze inne. Znaczy to, że punkty $f(x)$ i $h(g(x))$ należą do tego samego sympleksu triangulacji T , mianowicie do tego, który wśród swoich wierzchołków ma wierzchołki $a(U_1), \dots, a(U_k)$.

Jeśli w szczególności wielościan W jest sferą S^n i $\dim X < n$, to wielościan W' ma wymiar $< n$. Odwzorowanie h , jako symplecjalne, nie podwyższa wymiaru. Dostajemy więc $\dim h(W') < n$. Obraz $h(W')$ wielościanu W' nie pokrywa sfery S^n . Nie pokrywa też sfery S^n obraz $h(g(X))$ przestrzeni X . Odwzorowanie zatem $h \circ g$ jest nieistotne i tym samym nieistotne jest odwzorowanie f homotopijne z $h \circ g$.

Dostajemy więc

Wniosek. *Odwzorowania przestrzeni metrycznych zwartych wymiaru $< n$ w sferę S^n są wszystkie nieistotne.*

Twierdzenie⁽⁹⁾. *Zbiory zwarte wymiaru $\leq n - 2$ nie rozcinają przestrzeni E^n .*

⁽⁹⁾ P. S. Urysohn, *Memoire sur les multiplicites Cantorienes*, Fundamenta Mathematicae 7 (1925), s. 30—139; w *Trudach po topologii i drugim oblast'jam matematiki Urysohna* w t. I na s. 435. S. Mazurkiewicz, *Sur les ensembles de dimension faible*, Fundamenta Mathematicae 13 (1929), s. 210—217; w *Travaux de topologie Stefana Mazurkiewicza*, Warszawa 1969, na s. 178—184 (twierdzenie — s. 179).

Dowód. Niech A będzie podzbiorem zwartym przestrzeni E^n takim, że $\dim A \leq n - 2$. Niech $f: A \rightarrow S^{n-1}$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Na mocy wniosku z lematu faktoryzacyjnego f jest odwzorowaniem nieistotnym. Na mocy kryterium Borsuka zbiór A nie rozcina E^n .

Jednym z wniosków tego twierdzenia jest to, że brzeg zbioru otwartego położonego w E^n i ograniczonego ma wymiar $\geq n - 1$. Jest tak, bo brzeg zbioru otwartego ograniczonego w E^n jest zwarty i rozcina E^n .

W szczególności — *na płaszczyźnie* — brzeg zbioru otwartego ograniczonego, mając wymiar ≥ 1 , zawiera kontinuum wielopunktowe⁽¹⁰⁾, co zawiera w sobie stwierdzenie, że zbiór Cantora — w żadnym położeniu — nie rozcina płaszczyzny.

⁽¹⁰⁾ Ten szczególny przypadek twierdzenia jest znany jako *twierdzenie Phragmèna* (1885); por. C. Kuratowski, *Topologie II*..., s. 338.

WYKŁAD 7. Powrót do twierdzenia Jordana o rozcinaniu płaszczyzny • Jeziora Wady • Twierdzenie Schoenfliesa • Nieprzenoszenie się twierdzeń schoenfliesowskich na przestrzeń trójwymiarową

Z ogólnego twierdzenia o rozcinaniu wiemy, że krzywa zwykła zamknięta, tj. obraz homeomorficzny okręgu, rozcina płaszczyznę. Nie wiemy wszakże, czy — tak jak w przypadku wielokąta zamkniętego — rozcina na dwa obszary i czy jest wspólnym brzegiem obszarów, na które rozcina płaszczyznę. Dowód twierdzenia, że tak właśnie jest, a więc dowód pełnego twierdzenia Jordana, będzie przedmiotem tego wykładu⁽¹⁾.

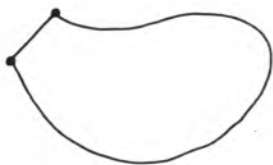
Twierdzenie Schoenfliesa w istotny sposób dopełnia twierdzenie Jordana. Wynika zeń między innymi to, że obszary w dopełnieniu krzywej są homeomorficzne z odpowiednimi obszarami dopełnienia okręgu $x^2 + y^2 = 1$. Jeśli chodzi o wielokąty, to twierdzenia Schoenfliesa było dowiedzione w wykładzie 1.

Na mocy wniosku z twierdzenia (wykład 6, s. 144) *krzywa zwykła zamknięta jest brzegiem każdego z obszarów, na które rozcina płaszczyznę*. Dlatego dla dowodu twierdzenia Jordana pozostaje wykazać, że *krzywa zwykła zamknięta nie może być brzegiem więcej niż dwu obszarów*.

Zauważmy, że jeśli krzywa zwykła zamknięta zawiera odcinek prostopadłościowy, to ma wypowiedzianą wyżej własność, bo (co łatwo daje się stwierdzić rozumowaniem wykorzystującym aksjomat Pascha) punkty niekońcowe

⁽¹⁾ Konsekwentny — inny niż tu przedstawiony — zarys wykładu topologii płaszczyzny daje Witold Wilkosz, *Les propriétés topologiques du plane Euclidien*, Memorial des Sciences Mathematiques, Fascicule 45, Paris 1931.

takiego odcinka nie mogą leżeć na brzegu więcej niż dwu obszarów w dopełnieniu krzywej.



Rys. 94. Krzywa zwykła zamknięta zawierająca odcinek prostoliniowy

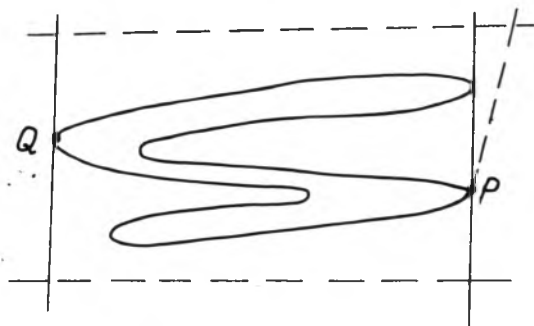
Zatem, prawdziwość twierdzenia Jordana rozciąga się na krzywe zwykle zamknięte zawierające odcinki prostoliniowe.

Stąd prawdziwość twierdzenia o konfiguracji θ (wykład 1, s. 31), rozciąga się na konfiguracje w kształcie litery θ mające na co najmniej dwu łukach odcinki prostoliniowe (bo wte-

dy każda z trzech krzywych zwykłych zamkniętych pojawiająca się w konfiguracji θ zawiera odcinek prostoliniowy, co pozwala adaptować dowód znany z przypadku wielokątowego). Będziemy teraz korzystać z tak poszerzonego twierdzenia o konfiguracji θ .

Twierdzenie. *Krzywa zwykła zamknięta jest brzegiem nie więcej niż dwóch obszarów.*

Dowód. Niech K będzie krzywą zwykłą zamkniętą. Niech W będzie wielokątem mającym z krzywą K dokładnie dwa punkty wspólne i przy tym takie, że krzywa K leży w jednym z obszarów — przyjmijmy, że w ograniczonym — na które ten wielokąt rozcina płaszczyznę.



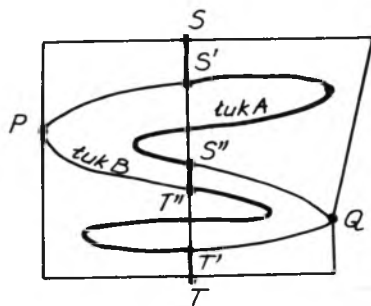
Rys. 95. Wielokąt W

W celu znalezienia tego rodzaju wielokąta wystarczy zamknąć krzywą K w pasie między dwoma prostymi równoległymi tak, by miała ona punkty na każdej z tych dwóch prostych. Niech P będzie tego rodzaju punktem na jednej prostej, a Q na drugiej. Odchylimy półproste wychodzące z P i Q na zewnątrz pasa. Brzeg tak poszerzonego pasa nie ma już z krzywą K innych punktów wspólnych niż P i Q . Wielokąt W dostaniemy, odcinając zeń części nie ograniczone prostymi prostopadłymi do danych prostych równoległych, dostatecznie dalekimi od K .

Oznaczmy literą G obszar ograniczony przez W i zawierający K . Punkty P i Q dzielą krzywą K na dwa łuki A i B , z których każdy łączy w obszarze G punkty P i Q z brzegu tego obszaru.

Niech S i T będą punktami na W przedzielającymi punkty P i Q . Poprowadźmy w obszarze G łamaną łączącą S i T .

Idąc wzdłuż tej łamanej od S do T , przecinamy łuki A i B (twierdzenie o krzywej θ mającej na dwu łukach odcinki prostoliniowe). Przymijmy, że pierwszy jest przecięty łuk A . Niech S' będzie pierwszym, a S'' ostatnim punktem łuku A na łamanej od S do T



Rys. 96. Dowód twierdzenia Jordana

Twierdzimy, że fragment łamanej od S'' do T przecina łuk B .

Jeśli tak nie było, to łuk złożony z odcinka łamanej od S do S' , łuku A od S' do S'' i fragmentu łamanej od S'' do T łączyłby S i T omijając łuk B , co przeczyłoby poszerzonemu stwierdzeniu o konfiguracji θ (tą konfiguracją jest teraz konfiguracja $W \cup B$).

Niech więc T'' będzie pierwszym punktem na łamanej od S'' do T leżącym na łuku B . Niech H będzie tą składową dopełnienia krzywej K , w której leży — z wyjątkiem końców — odcinek $S''T''$ rozważanej łamanej. Niech T' będzie ostatnim na łamanej ST punktem łuku B .

Pokażemy, że poza składową H i składową nieograniczoną dopełnienie krzywej K nie ma innych składowych.

Przypuśćmy, że H' jest tą trzecią składową. Rozważmy krzywą θ złożoną z wielokąta W i łuku łączącego S i T , złożonego z odcinków: SS' , $T'T$ i $S''T''$ poprzednio rozważanej łamanej od S do T' i łuków $S'S''$ (na łuku A) oraz $T''T'$ (na łuku B). Łuk ten nie ma punktów wspólnych ze składową H' . Dlatego składowa H' leży w jednej ze składowych dopełnienia rozważanej tu krzywej θ (to, że nie ma punktów wspólnych z pozostałymi dwoma łukami tej krzywej, jest oczywiste). Stąd jeden z punktów, P lub Q , nie leży w domknięciu składowej H , a więc nie leży na jej brzegu. Sprzeczność z twierdzeniem, według którego krzywa K jest brzegiem każdej składowej swego dopełnienia.

Udowodniliśmy w ten sposób:

Twierdzenie Jordana (1893)⁽²⁾. Krzywa zwykła zamknięta rozcina płaszczyznę na dwa obszary i jest ich wspólnym brzegiem.

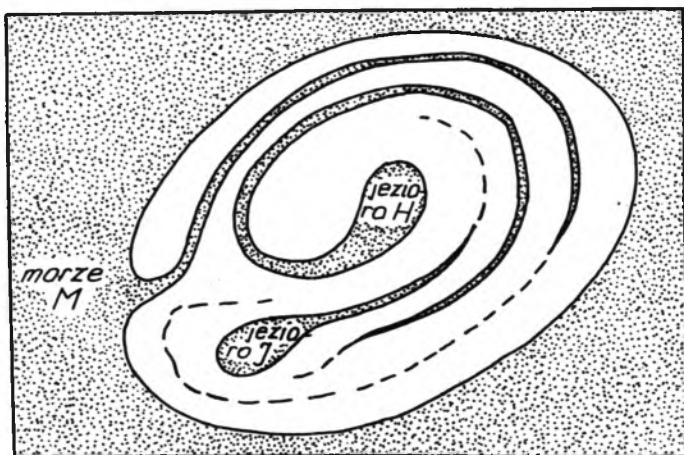
Można zapytać: Czy możliwe są na płaszczyźnie (i w przestrzeniach euklidesowych wyższych wymiarów) trzy obszary mające wspólny brzeg?

⁽²⁾ Camille Jordan, *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique I* (1883). Dowód Jordana był niewystarczający. Najbardziej znanym dowodem jest dowód Brouwera (1910), którego ideę można odnaleźć w *Grundzüge...* (1914) Hausdorffa. Według Brouwera pierwszy poprawny dowód podał Veblen (1905). Podany tu dowód jest wzorowany na dowodzie z książki E. E. Moise'a, *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, Springer 1977, s. 31 i dalsze.

Odpowiedź dał L. E. J. Brouwer (1910), budując na płaszczyźnie dla każdego n naturalnego wspólne brzegi n obszarów, a nawet wspólne brzegi przeliczalnie wielu obszarów⁽³⁾.

Konstrukcję Brouwera przedstawił w sposób poglądowy K. Yoneyama (1917) w swoich słynnych *jeziorach Wady*⁽⁴⁾.

Jeziora Wady. Na wyspie Wotoczonej morzem M są dwa jeziora H i J . Morze i jeziora traktujemy jako zbiory otwarte (nie wliczamy do nich ich brzegów) i zakładamy ich spójność. W pierwszym kroku konstrukcji wyprowadza się z morza M i jezior H i J kanały, tak by każdy punkt pozostawionego lądu znalazł się w odległości ≤ 1 od każdej z trzech wód. W drugim kroku przedłuża się te kanały w taki sposób, żeby każdy punkt pozostawionego lądu znalazł się w odległości $\leq 1/2$ od każdej z trzech wód. W rezultacie tego postępowania każda z wód z morza M i z jezior H i J wypełni gęsto wyspę. Pozostałość wyspy W jest wspólnym brzegiem trzech wód.



Rys. 97. Jeziora Wady

Wspólny brzeg trzech lub więcej obszarów płaskich musi mieć osobliwą budowę, czego można się domyślić z opisanego przykładu. U Brouwera ten wspólny brzeg okazywał się *kontinuum nierozkładalnym*, tj. nie dającym się przedstawić w postaci sumy dwóch kontinuuów, z których żadne nie jest całością. Kontinua o prostej budowie mają na ogół tego rodzaju rozkład. Ale już kontinuum węzowe (s. 137, wykład 5) jest nierozkładalne.

⁽³⁾ L. E. J. Brouwer, *Zur Analysis Situs*, *Mathematische Annalen* 68 (1920), s. 422—434; w *Collected Works*, vol. 2, s. 352—370 z komentarzem. Konstrukcja Brouwera była odpowiedzią na błędne przypuszczenia Schoenfliesa z książki *Die Entwicklung der Lehre von Punktmannigfaltigkeiten II*, Leipzig 1908, co do budowy brzegów obszarów płaskich. Patrz uwagi na ten temat u Wilkosza, s. 28—29.

⁽⁴⁾ Kunizô Yoneyama, *Theory of continuous set of points*, *Tôhoku Mathematical Journal* 12

Rys. 98. Rozkład odcinka na dwa kontinua różne od całości

Kuratowski (1926) dowiódł, że wspólny brzeg trzech lub więcej obszarów płaskich musi być continuum nierozkładalnym lub sumą dwu kontinuw nierozkładalnych. Obie możliwości, jak pokazał Knaster, realizują się⁽⁵⁾.

W przestrzeni wspólne brzegi trzech lub więcej obszarów nie muszą już być tak osobliwe. Mogą być nimi kontinua lokalnie spójne, a — jak pokazał Lubański⁽⁶⁾ — nawet ANR-y.

Ogólne twierdzenie Jordana pociąga za sobą — bez istotnych zmian do wodu — twierdzenie o krzywej θ (nie nakładając żadnych ograniczeń na postać łuków), a w rezultacie inne konsekwencje twierdzenia Jordana, jak twierdzenie Moore'a o trójnogach, dowodzone przedtem dla trójnogów będących grafami. Teraz łuki wychodzące z punktu rozgałęzienia mogą być dowolne.

* * *

Kontinuum i mające z tym kontinuum po jednym punkcie wspólnym dwie nie przecinające się półproste rozcinają razem płaszczyznę.



Rys. 99. Przekrój płaszczyzny

To stwierdzenie ma udział w dowodzie następującej ciekawej samej w sobie⁽⁷⁾ własności kontinuw płaskich

Niech K będzie continuum płaskim. Niech C będzie cięciwą tego kontinuum, tj. odcinkiem mającym końce na K . Załóżmy, bez szkody dla ogólności, że C ma długość 1. Dla każdej liczby α , $0 < \alpha < 1$, wśród cięciw równoległych do C istnieje bądź taka, której długość jest α , bądź taka, której długość jest $1-\alpha$.

⁽⁵⁾ K. Kuratowski, *Sur les coupures irréductibles du plan*, Fundamenta Mathematicae 6 (1924), s. 130—145; B. Knaster, *Quelques coupures singulières du plan*, Fundamenta Mathematicae 7 (1925), s. 264—289. Druga możliwość (rozkładalność) nie była przez wcześniejszych autorów zauważana, ale por. P. Urysohn, *O kantorowych mnogoobrazach*, *Trudy po topologii i drugim oblastjam matematiki*, t. I, Moskwa—Leningrad 1951, s. 229—512; uwagi na s. 355.

⁽⁶⁾ M. Lubański, *An example of an absolute neighbourhood retract, which is the common boundary of three regions in the 3-dimensional euclidean space*, Fundamenta Mathematicae 40 (1953), s. 29—38.

⁽⁷⁾ Twierdzenie Levy'ego (1934). Dowód Hopfa (1937). Szczegóły w książce L. A. Lusternika, *Wypukłyje figury i mnogogranniki*, Moskwa 1956. P. Levy, *Sur une generalization du théorème de Rolle*, Comptes Rendus Paris 198 (1934), s. 424—425. H. Hopf, *Über Sehnen ebener Kontinuen und Schleifen geschlossener Wege*, Commentarii Mathematici Helvetici 9 (1937), s. 303—319; przekład rosyjski w Uspechach Matiem. Nauk 10 (1944), s. 45—50.

D o w ó d. Niech $K + \alpha$ będzie kontinuum powstałym z K przez przesunięcie K o α wzdłuż osi x -ów. Przecinanie się K i $K + \alpha$ implikuje istnienie cięciwy równoległej do osi x -ów i mającej długość α .

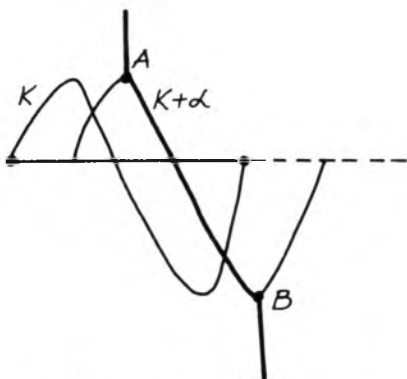
Przypuśćmy, że przy pewnym α , $0 < \alpha < 1$ nie ma cięciw równoległych do osi x -ów o długościach α i $1 - \alpha$. Wynika stąd, że

$$K \cap (K + \alpha) = \emptyset = (K + 1) \cap (K + \alpha).$$

Niech A będzie punktem na $K + \alpha$ o maksymalnej rzędnej, a B punktem na $K + \alpha$ o minimalnej rzędnej. Półproste pionowe od A w górę i od B w dół po dodaniu do nich kontinuum rozcinają $K + \alpha$ płaszczyznę. Ten przekrój płaszczyzny jest rozłączny zarówno z K , jak i z $K + 1$ i — jak łatwo stwierdzić — K i $K + 1$ mają punkty w różnych składowych dopełnienia tego przekroju (punkt 0 osi x -ów należy do K , a punkt $1 + \alpha$ do $K + \alpha$). Dostaliśmy sprzeczność, bo $K \cup (K + 1)$ jest kontinuum, co wynika z tego, że punkt 1 osi x -ów należy zarówno do K , jak i do $K + 1$.

W istocie dowiedliśmy, że jeśli wśród równoległych do siebie cięciw kontinuum płaskiego nie ma cięciw długości a i b , to nie ma cięciwy długości $a + b$. Stąd już nietrudny wniosek, że wraz z każdą cięciwą kontinuum ma dla każdego n naturalnego cięciwę mającą $1/n$ jej długości; poza liczbą postaci $1/n$ wyjść nie można (por. przykład w książce L. A. Lusternika. *Wypukłyje figury i mnogogranniki*, Moskwa 1956, s. 190).

* * *



Rys. 100. Twierdzenie o cięciwach

Twierdzenie Schoenfliesa. Punkt p płaszczyzny nazwijmy osiągalnym prostoliniowo ze zbioru A , jeśli istnieje odcinek o końcu p i zawarty, być może poza jednym punktem p , w zbiorze A .

Nie wymaga dowodu

Lemat 1. Zbiór punktów brzegu obszaru osiągalnych prostoliniowo z obszaru jest gęsty w brzegu obszaru.

Dotyczy to w szczególności krzywej zwykłej zamkniętej i każdej z dwu składowych jej dopełnienia. W tym przypadku można wszakże powiedzieć więcej.

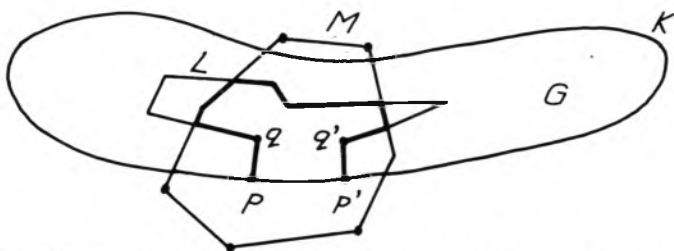
Niech K będzie krzywą zwykłą zamkniętą i niech G będzie jednym z obszarów składowych jej dopełnienia.

Lemat 2. Niech $\delta > 0$ będzie dane. Istnieje zbiór skończony punktów $p_0, p_1, \dots, p_k, p_0$ krzywej K — zapisany w uporządkowaniu cyklicznym zgodnym z ustaloną parametryzacją krzywej K — osiągalnych prostoliniowo z obszaru G , takich że łuki $p_j p_{j+1}$ krzywej K mają średnice $\leq \delta$.

D o w ó d. Niech $h: C \rightarrow K$ będzie homeomorfizmem z okręgu $|z| = 1$. Istnieje $\eta > 0$ takie, że jeśli $d(x, x') < \eta$, to $d(h(x), h(x')) < \delta$. Weźmy na C zbiór skończony punktów q_0, q_1, \dots, q_k , q_0 (porządek cykliczny) taki, że $d(q_j, q_{j+1}) < \eta$. Niech $p'_j = h(q_j)$. Zapowiedziane punkty p_j dostaje się przez odpowiednio małe przesunięcia punktów p'_j ; ich istnienie zapewnia lemat 1.

Lemat 3. Niech p i p' będą punktami krzywej K osiągalnymi prostoliniowo z G . Istnieją odcinki pq i $p'q'$ leżące poza p i p' w obszarze G i łamana łącząca w G punkty q i q' , odległa od łuku pp' krzywej K nie więcej niż o trzy średnice tego łuku.

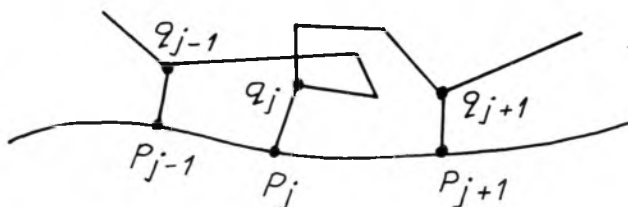
D o w ó d. Łuk pp' krzywej K zamknijmy w obszarze ograniczonym przez łamaną zamkniętą M mającą średnicę nie większą niż trzy średnice łuku pp' . Niech pq i $p'q'$ będą odcinkami leżącymi poza punktami p i p' w H i G . Niech L będzie łamaną łączącą w G punkty q i q' . Skróćmy (rys. 101) łamaną L tak, by nie wykraczała poza obszar H ograniczony przez M . Otrzymujemy zapowiedzianą łamaną.



Rys. 101. Łamana w G łącząca punkty p i p' oraz bliska łukowi pp'

Lemat 4. Niech p_0, \dots, p_k , p_0 będą punktami leżącymi na krzywej K w porządku cyklicznym osiągalnymi prostoliniowo z obszaru G . Istnieją odcinki p_0q_0, \dots, p_kq_k rozłączne ze sobą, leżące poza punktami p_0, \dots, p_k w obszarze G . Istnieje łamana zamknięta $q_0q_1 \dots q_kq_0$ zawarta w G , której odcinki q_jq_{j+1} są odległe od łuków p_jp_{j+1} krzywej K nie więcej niż o trzy średnice największego z tych łuków.

D o w ó d. Każdy z dwu punktów q_j i q_{j+1} zbudowanych dla punktów p_j i p_{j+1} , jak w lemacie 3. połączmy w G łamaną odległą od łuku p_jp_{j+1} o nie więcej niż trzy średnice tego łuku, istniejącą na mocy tego lematu. Suma tych łaman, po odrzuceniu zbędnych odcinków i odpowiednio małych modyfikacjach wokół punktów q_j (rys. 102), jest zapowiedzianą łamaną.



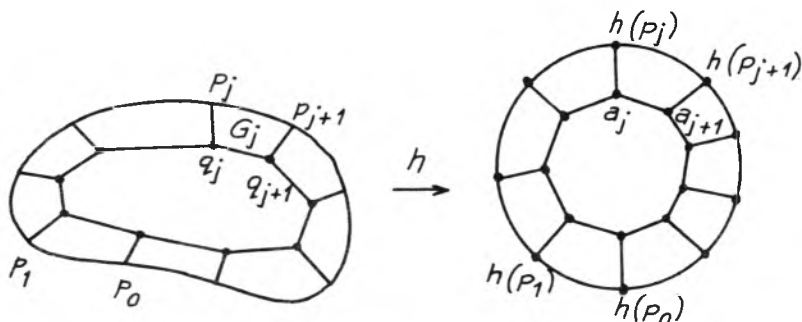
Rys. 102. Łamana zamknięta $q_0q_1 \dots q_kq_0$

Twierdzenie Schoenfliesa (1906)⁽⁸⁾. Niech K będzie krzywą zamkniętą i niech S będzie okręgiem, leżącymi na płaszczyźnie. Homeomorfizm krzywej K na okrąg S ma przedłużenie do homeomorfizmu płaszczyzny na siebie.

D o w ó d. Niech h będzie danym homeomorfizmem K na S . Niech G będzie składową ograniczoną dopełnienia krzywej K do płaszczyzny. Niech Q będzie kołem ograniczonym przez S .

Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ będzie ciągiem liczb dodatnich dążącym do zera.

Weźmy liczbę dodatnią δ_1 , istniejącą wobec ciągłości h , o tej własności, że $d(h(u), h(v)) \leq \varepsilon_1$, jeśli $d(u, v) \leq \delta_1$. Przyjmijmy, że $\delta_1 \leq 1$.



Rys. 103. Twierdzenie Schoenfliesa: pierwszy krok konstrukcji

Rozmieścimy na K punkty p_0, \dots, p_k , p_0 w porządku cyklicznym tak, by łuki $p_j p_{j+1}$ na K miały średnice $\leq \delta_1/3$. Wybierzmy te punkty przy tym tak, by były osiągalne prostoliniowo z G , co jest możliwe wobec lematu 1. Niech $p_j q_j$ będą odcinkami o długości $\leq \delta_1/3$ leżącymi — poza ich końcami p_j — w obszarze G .

Utwórzmy łamaną $q_0 \dots q_k q_0$ zawartą w G , spełniającą warunki lematu 4. Obszary G_j ograniczone przez $p_j p_{j+1} q_{j+1} q_j$ mają średnice $\leq \delta_1$, $\delta_1 \leq 1$, na mocy wspomnianego lematu.

Z punktów $h(p_0), \dots, h(p_k)$ na okręgu S wystawmy ku środkowi koła Q odcinki $h(p_j) a_j$ o długościach $\leq \varepsilon_1$ mniejszych niż promień koła. Z uwagi na dobór δ_1 odległości $h(p_j)$ od $h(p_{j+1})$ są $\leq \varepsilon_1$, więc obszary ograniczone przez $h(p_j) h(p_{j+1}) a_{j+1} a_j$ mają średnice $\leq 3\varepsilon_1$ (rys. 103).

⁽⁸⁾ A. Schoenflies, *Beiträge zur Theorie der Punktmengen*, Mathematische Annalen 62 (1906), s. 286—328. Twierdzenie Schoenfliesa można wyprowadzić również z twierdzenia Riemanna o odwzorowaniach konforemnych koła $|z| < 1$; por. I. I. Priwałow, *Wwiedienije w teoriju funkcji kompleksnogo pieriemennogo*, Moskwa—Leningrad 1948, s. 391. Sam Riemann nie dowiódł swego twierdzenia. Dowód podał Carathéodory (1913): C. Carathéodory, *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete*, Math. Annalen 73 (1913), s. 323—370.

Dowód twierdzenia Schoenfliesa można znaleźć w książce M. H. A. Newman, *Elements of the topology of plane sets of points*, Cambridge University Press, 1951; dowód można również znaleźć w książce H. Zieschanga, E. Vogta i H. D. Coldewey, *Powierzchnosti i razrywnyje grupy*, Moskwa 1988 (tłum. z wydań niemieckich, 1980, 1981 s. 240—259).

Homeomorfizm h przedłużamy na łuki $p_j q_j$ i na łamaną $q_0 \dots q_k q_0$ tak, by odcinki $p_j q_j$ przeszły na odcinki $h(p_j) a_j$, a łamana $q_0 \dots q_k q_0$ na łamaną $a_0 \dots a_k a_0$. Następnie tak otrzymany homeomorfizm przedłużamy na podobszar H obszaru G ograniczony łamaną $q_0 \dots q_k q_0$, tak aby ten obszar przeszedł na podobszar koła ograniczony łamaną $a_0 \dots a_k a_0$, co można zrobić, posługując się wielokątową wersją twierdzenia Schoenfliesa (patrz wykład 1, s. 36).

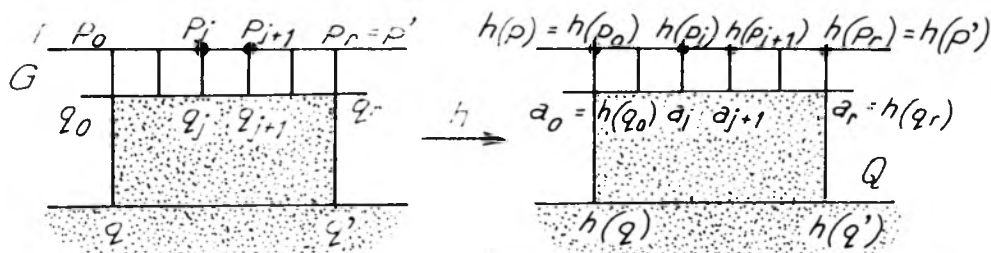
Naszym celem jest przedłużenie otrzymanego już homeomorfizmu — nadal jest oznaczany przez h — na podobszary G_j obszaru G , tak by przeszły na podobszary koła Q ograniczone przez $h(p_j) h(p_{j+1}) a_{j+1} a_j$.

Niech $pp'q'q$ (dla skrótu opuszczamy wskaźnik) będzie jednym z tych obszarów (rys. 104).

Rozważmy podobszar koła Q wyznaczony przez punkty $h(p)$, $h(p')$, $h(q')$ i $h(q)$.

Niech $\delta_2 > 0$ będzie wobec ciągłości h dobrane tak, by $d(h(u), h(v)) \leq \varepsilon_2$, jeśli $d(u, v) \leq \delta_2$; niech będzie przy tym $\delta_2 \leq 1/2$.

Rozmieścimy na łuku pp' punkty $p = p_0, p_1, \dots, p_r = p'$ numerowane zgodnie z porządkiem na tym łuku, aby średnice łuków $p_j p_{j+1}$ były $\leq \delta_2/3$. Wybierzmy te punkty przy tym tak, by były prostoliniowo osiągalne z obszaru G , co jest możliwe na mocy lematu 1. Niech $p_j q_j$ będą odcinkami leżącymi — poza ich końcami p_j — w obszarze ograniczonym przez $pp'q'q$ i mającymi długości $\leq \delta_2/3$, z tym że za odcinki $p_0 q_0$ i $p_r q_r$ (skrajne) bierzemy odpowiednie pododcinki odcinków pq i $p'q'$ wystawione z punktów p i q' w poprzednim kroku konstrukcji.



Rys. 104. Twierdzenie Schoenfliesa: drugi krok konstrukcji

Lemat 3 zapewnia istnienie łamanej $q_0 \dots q_r$ łączącej w obszarze ograniczonym przez $pp'q'q$ punkty q_0 i q_r tak, że obszary zamknięte przez $p_j q_j q_{j+1} p_{j+1}$ mają średnice $\leq \delta_2$, $\delta_2 \leq 1/2$.

Z punktów $h(p) = h(p_0)$, $h(p_1)$, \dots , $h(p_r) = h(p')$ na łuku $h(p)h(p')$ okręgu S wystawmy ku środkowi koła Q odcinki $h(p_j) a_j$ o długościach $\leq \varepsilon_2$, których końce a_j leżą w obszarze zamkniętym przez $h(p)h(p')h(q')h(q)$; ten ostatni warunek nie dotyczy $j = 0$ i $j = r$ (tj. odcinków skrajnych): odcinki $h(p_0)h(q_0)$ i $h(p_r)h(q_r)$ są obrazami odpowiednich odcinków $p_0 q_0$ i $p_r q_r$ i leżą na odcinkach wystawionych ku środkowi koła Q z punktów p_0 i p_r na poprzednim kroku konstrukcji.

Homeomorfizm h przedłużamy na odcinki $p_j q_j$ i łamaną $q_0 \dots q_r$ tak, by odcinki $p_j q_j$ przeszły na odcinki $h(p_j) a_j$, a łamana $q_0 \dots q_r$ na łamaną $a_0 \dots a_r$. Określony w ten sposób homeomorfizm przeprowadza łamaną zamkniętą $q q_0 \dots q_r q'$ na łamaną zamkniętą $h(q) a_0 \dots a_r h(q')$. Ten homeomorfizm przedłużamy na obszary ograniczone przez te łamane. Istnienie przedłużenia jest konsekwencją wielokątowej wersji twierdzenia Schoenfliesa; obszar, i jego obraz, na który został przedłużony homeomorfizm h , jest na rys. 104 zacięniowany.

Dalsze postępowanie polega na przedłużeniu otrzymanego dotąd homeomorfizmu na podobszary obszar G ograniczone przez $p_j q_j q_{j+1} p_{j+1}$ tak, by przeszły na podobszary koła Q ograniczone przez $h(p_j) h(q_j) h(q_{j+1}) h(p_{j+1})$, określone w drugim kroku konstrukcji. Powtarzamy w tym celu postępowanie z drugiego kroku konstrukcji w zastosowaniu do tych obszarów z liczbą ε_3 z danego na początku ciągu. Kontynuując to postępowanie w dalszych krokach, przedłużamy h na cały obszar G . Wzajemna jednoznaczność odwzorowania i ciągłość jest zapewniona tym, że średnice obszarów, na które się przedłuża w kolejnych krokach odwzorowanie h , jak również średnice ich obrazów, są ograniczone przez liczby ciągu dążącego do zera.

Był to dowód twierdzenia Schoenfliesa.

Twierdzenie Schoenfliesa stwierdza w szczególności, że *obszar ograniczony przez krzywą zwykłą zamkniętą jest homeomorficzny z wnętrzem koła*; dotyczy to również obszaru zewnętrznego, jeśli płaszczyznę dopełni się do sfery punktem w nieskończoności.

Prostym wnioskiem z twierdzenia Schoenfliesa jest twierdzenie o zachowaniu otwartości w wymiarze 2, które w pełnej ogólności otrzymaliśmy jako wniosek z twierdzenia Spernera o zamocowaniu.

Wyprowadzenie twierdzenia o zachowaniu otwartości w wymiarze 2 z twierdzenia Schoenfliesa⁽⁹⁾. Niech U będzie podzbiorem otwartym płaszczyzny E^2 . Niech $p \in U$. Niech $h : U \rightarrow E^2$ będzie homeomorfizmem U na $h(U)$. Niech Q będzie kołem o środku p zawartym wraz ze swym okręgiem S w zbiorze U . Jeśli pokażemy, że zbiór $h(Q - S)$ jest otwarty, to wobec dowolności p w U , dowód otwartości $h(U)$, a więc i dowód twierdzenia, będzie zakończony.

Odnotujmy, że zbiór $h(Q - S)$ jako obraz zbioru spójnego jest spójny.

Ograniczmy rozważania do homeomorfizmu $h|_Q$. Korzystając z twierdzenia Schoenfliesa (uwaga po dowodzie zasadniczej wersji), przedłużmy $h|_Q$ do homeomorfizmu $g : E^2 \xrightarrow{\cong} E^2$. Mamy

$$g(E^2 - S) = g(Q - S) \cup g(E^2 - Q) = h(Q - S) \cup g(E^2 - S).$$

⁽⁹⁾ Dowód poprzez twierdzenie Schoenfliesa był pierwszym dowodem, także w szczególnym przypadku wymiaru 2, twierdzenia o zachowaniu otwartości. W kilka lat po Schoenfliesie dowód już dla dowolnego wymiaru podał Brouwer.

W tym wzorze składniki sumy, w szczególności zbiór $h(Q - S)$, są otwarte, bo g jest homeomorfizmem i przenosi zbiory otwarte płaszczyzny, $Q - S$ i $E^2 - Q$, na otwarte.

Homeomorfizm między łukami leżącymi na płaszczyźnie przedłuża się do homeomorfizmu płaszczyzny na siebie. Jest to jeszcze jedno twierdzenie z kręgu (tak je nazwijmy) *twierdzeń schoenfliesowskich*. Dowód może być przeprowadzony analogicznie do podanego wyżej dowodu dla krzywej zwykłej zamkniętej (jeden z łuków, bez ograniczenia ogólności, może być dany w postaci odcinka prostoliniowego), ale trzeba poradzić sobie w nim z pewną osobliwością łuków, jaką są ich końce. Można również posłużyć się twierdzeniem Schoenfliesa, którego dowiedliśmy, przedłużając dany homeomorfizm między łukami do homeomorfizmu między krzywymi zamkniętymi. Sprowadza się to do prostego zadania geometrycznego: przedłużyć łuk na płaszczyźnie, nie wychodząc z płaszczyzny do krzywej zwykłej zamkniętej. Zadanie zawiera w sobie pewną trudność, bo koniec łuku może mieć położenie osobliwe, podobne do położenia końca spirali $r = 1/\varphi$; dowód: Kerékjártó, *Vorlesungen...*, s. 69.

Również homeomorfizmy między zbiorami Cantora przedłużają się do homeomorfizmu płaszczyzny⁽¹⁰⁾.

Bardzo proste przykłady pokazują, że twierdzenia schoenfliesowskie nie przenoszą się nawet na grafy: homeomorfizm między grafami położonymi na płaszczyźnie tak, jak pokazuje rys. 105, nie przedłuża się do homeomorfizmu płaszczyzny.

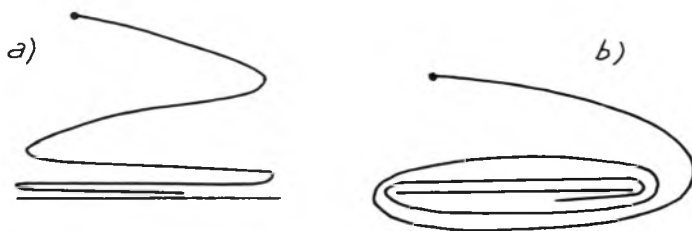


Rys. 105. Twierdzenie Schoenfliesa nie przenosi się na grafy

Grafy te są homeomorficzne, ale są na płaszczyźnie położone *inaczej*.

Dwie sinusoidy zagęszczone leżące na płaszczyźnie mogą być na niej *inaczej* położone, co ilustruje rys. 14. Punkty odcinka zagęszczenia sinusoidy (b) nie są osiągalne łukiem z dopełnienia, inaczej niż punkty odcinka zagęszczenia sinusoidy (a).

⁽¹⁰⁾ Twierdzenie Moore'a; R. L. Moore, *Conditions under which one of two given closed linear sets may be thrown into the other one by a continuous transformation of a plane onto itself*, American Journal of Mathematics 48 (1926), 67—72. Twierdzenie o zbiorach Cantora wyprowadza Moore z twierdzenia (por. przypis 12), według którego homeomorfizm między zbiorami domkniętymi leżącymi na łukach daje się przedłużyć do homeomorfizmu płaszczyzny, oraz z twierdzenia, według którego przez zbiór Cantora leżący na płaszczyźnie daje się poprowadzić łuk; na temat tego drugiego twierdzenia por. uogólnienie Whyburna (1932). Jak dalece można w twierdzeniu Moore'a odejść od założenia płaskości, patrz K. Omiljanowski i H. Patkowska, *On the continua which are Cantor homogeneous or arcwise homogeneous*, Colloquium Mathematicum 58 (1990), 201—212. Inny dowód twierdzenia Moore'a, por. *Topologie II* Kuratowskiego, Warszawa—Wrocław 1950, s. 383.



Rys. 106. Inaczej położone sinusoidy zagęszczone

Jeśli A i B są podzbiorami przestrzeni X i istnieje homeomorfizm przestrzeni X na siebie, przeprowadzający A na B , to mówimy, że zbiory A i B są *jednakowo położone* w X .

Z dowiedzionych i przytoczonych twierdzeń schoenfliesowskich wynika w szczególności to, że każde dwie krzywe zwykłe zamknięte, każde dwa łuki, każde dwa zbiory Cantora są jednakowo położone na płaszczyźnie.



Rys. 107. Najprostszy węzeł

Te twierdzenia schoenfliesowskie przedstawiają być prawdziwe w E^3 . Jest fizyczną oczywistością, że twierdzenie Schoenfliesa nie jest prawdziwe dla krzywych zwykłych zamkniętych: homeomorfizm krzywej tworzącej węzeł (tzw. koniczynowy z rys. 107) na okrąg położony w E^3 w sposób zwykły (np. dany równaniami $z = 0$ i $x^2 + y^2 = 1$) nie daje się przedłużyć do homeomorfizmu E^3 na siebie, chociaż od wyobrażeń do dowodu nie jest blisko⁽¹¹⁾.

Raczej nieoczekiwane jest to, że zbiory Cantora mogą być w E^3 inaczej położone niż jakikolwiek zbiór Cantora położony na prostej w E^3 (np. na osi x -ów). Wiadomo, że przez każdy zbiór Cantora położony w E^3 można przeprowadzić łuk⁽¹²⁾, więc z istnienia w E^3 zbioru Cantora tak położonego wynika też istnienie łuku położonego inaczej (niż np. odcinek na osi współrzędnych).

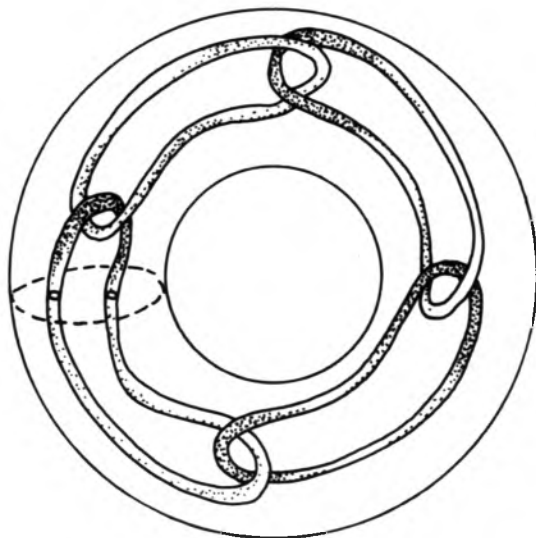
⁽¹¹⁾ Grupa podstawowa dopełnienia węzła koniczynowego jest nieabelowa (Max Dehn, 1910). Grupa podstawowa dopełnienia okręgu w zwykłym położeniu jest izomorficzna z grupą liczb całkowitych.

⁽¹²⁾ Jest to dawne twierdzenie pochodzące od F. Riesza (1906), przeniesione na przestrzeń E^3 przez A. Denjoya (1910), a następnie na kontinua lokalnie spójne bez punktów rozspajających lokalnie przez Kline'a i Moore'a (1918); dokładniejsze cytowania można znaleźć w: *Topologie II* Kuratowskiego (wyd. z 1950 r.) na s. 385, a dowód dla płaszczyzny i komentarze w książce W. W. Gołubiewa, *Lekcji po analityczeskiej teorii różniczkalnych równań*, Moskwa—Leningrad 1950, a także Kerékjarty w *Vorlesungen...*, s. 51.

Przykład Antoine'a (1920)⁽¹³⁾. W torus T położony w E^3 wpisujemy torusy T_1, \dots, T_{n_1} rozłączne, zaczepione o siebie, tak jak na rys. 108, których średnice nie przekraczają liczby $a \cdot$ średnica T , gdzie a jest ustaloną liczbą < 1 . W każdym torusie T_j powtarzamy to postępowanie z ilością torusów wpisanych być może zależną od j . Postępowanie kontynuujemy. W przekroju ciągu sum torusów z każdego szczebla konstrukcji dostajemy zbiór Cantora. Zbiór ten ma położenie inne niż zbiory Cantora położone na prostej w E^3 . W dopełnieniu tego drugiego, krzywe zwykle zamknięte są deformowalne do punktu; w dopełnieniu pierwszego są krzywe zamknięte na przykład te, które są zaczepione o T , jak na rys. 108, które w tym dopełnieniu nie są deformowalne do punktu. Mówi się też, że łuk przeprowadzony przez zbiór Antoine'a — nazywany *łukiem Antoine'a* — ma nietrywialną grupę podstawową⁽¹⁴⁾ swojego dopełnienia. Dowodu nie będziemy przeprowadzać.

Również sfera dwuwymiarowa w E^3 może być inaczej położona niż sfera w swoim zwykłym położeniu $|x| = 1$. Przykład tego rodzaju sfery był podany przez Alexandra (1924)⁽¹⁵⁾.

Istnieją łuki w E^3 położone inaczej i mające trywialne grupy podstawowe swoich dopełnień (A. Kirkor, *Wild 0-dimensional sets and the fundamental group*, Fundamenta Mathematicae 45 (1958), s. 228—236).



Rys. 108. Łuk Antoine'a

⁽¹³⁾ L. Antoine, *Sur l'homéomorphie de figures et leurs voisinages*, Journal de Mathematique 4 (1921), s. 221—325. Zjawisko Antoine'a przenosi się na wyższe wymiary; W. A. Blankenship, *Generalization of a construction of Antoine*, Annals of Mathematics 53 (1951), s. 276—297.

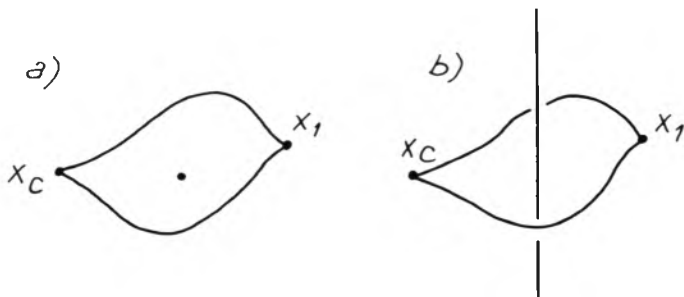
⁽¹⁴⁾ Grupie podstawowej jest poświęcony następny wykład.

⁽¹⁵⁾ J. W. Alexander, *An example of a simply connected surface bounding region which is not simply connected*, Proceedings of the National Academy of Sciences 10 (1924), s. 8—10.

WYKŁAD 8. Drogi i pętle • Ich dodawanie

- Równoważność • Grupa podstawowa • Izomorfizmy grup wyznaczone przez drogi • Zależność od punktu wyróżnionego • Przestrzenie jednospójne • Homomorfizmy wyznaczone przez odwzorowania ciągłe • Punkt widzenia teorii kategorii

Przez *drogę* w przestrzeni X , łączącą punkty x_0 i x_1 , rozumiemy odwzorowanie ciągle odcinka liczb rzeczywistych w przestrzeń X , przy którym początek odcinka przechodzi w x_0 , a koniec w x_1 . Ważnym sprawdzianem budowy przestrzeni jest to, że drogi łączące dwa punkty przestrzeni dają się z zachowaniem końców zdeformować homotopijnie jedna do drugiej. Niemożliwość tego rodzaju deformacji świadczy o pewnym odstępstwie od prawidłowej budowy, jaką mają na przykład pełne przestrzenie euklidesowe i ich podprzestrzenie wypukłe, w których tego rodzaju deformacje — jak zobaczymy — dają się przeprowadzić. Przeszkoda do ich przeprowadzenia pojawia się wtedy, kiedy z płaszczyzny usunie się punkt albo kiedy z przestrzeni trójwymiarowej usunie się prostą (rys. 109).



Drogi wracające do punktu wyjścia, przypadek $x_0 = x_1$, są nazywane *pętlami*.

W pewnych zakresach przestrzeni zachowanie się dróg i pętli ze względu na wspomniane możliwości deformacji homotopijnych determinuje przestrzeń z dokładnością do homeomorfizmu. Tak jest w zakresie *powierzchni*, tj. rozmaitości dwuwymiarowych zamkniętych. Tego się dowodzi⁽¹⁾. W wymiarze 3 trudności są większe: hipoteza Poincarégo — dotąd nie potwierdzona ani nie obalona — głosi, że *rozmaitość trójwymiarowa zamknięta, w której każda z dwóch dróg może być zdeformowana jedna do drugiej za pomocą homotopii zachowującej końce* — własność nazywana *jednospójnością* — jest homeomorficzna ze sferą S^3 ⁽²⁾. To, że sfery S^n , $n \geq 2$ są jednospójne, będzie dowiedzione w tym wykładzie.

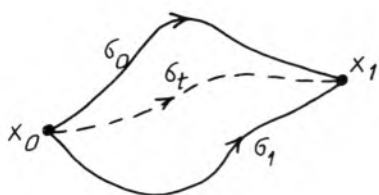
Zwróćmy uwagę na to, że drogi i pętle są obiektami skierowanymi. W określeniu drogi jest ważny nie tylko zbiór, po którym droga biegnie, lecz także parametryzacja.

Ustalmy, że drogi będą miały za dziedzinę odcinek jednostkowy $I = \{s : 0 \leq s \leq 1\}$. Droga w przestrzeni X od punktu x_0 do punktu x_1 jest więc odwzorowaniem ciągłym $\sigma : I \rightarrow X$ takim, że $\sigma(0) = x_0$ i $\sigma(1) = x_1$.

Drogi σ i τ od x_0 do x_1 nazwiemy *równoważnymi* — piszemy wtedy $\sigma \simeq \tau$ — jeśli istnieje homotopia $H : I \times I \rightarrow X$ taka, że

$$H(s, 0) = \sigma(s) \text{ i } H(s, 1) = \tau(s)$$

dla każdego s , i przy tym taka, że $H(0, t) = x_0$ i $H(1, t) = x_1$ dla każdego t . Mówimy, że jest to *homotopia zachowująca końce*.



Rys. 110. Jeśli przez h_t oznaczyć drogę daną wzorem $h_t(s) = H(s, t)$, $0 \leq s \leq 1$, to $h_0 = \sigma$ i $h_1 = \tau$. Każda z dróg h_t łączy punkty x_0 i x_1

Jeśli $x_0 = x_1$, to drogę nazywa się *pętlą* w punkcie x_0 (w punkcie x_1).

Relacja \simeq jest równoważnością. Łatwe sprawdzenie pomijamy.

Drogi można ze sobą *łączyć* — *dodawać*. Jeśli $\sigma : I \rightarrow X$ jest drogą od x_0 do x_1 , a $\tau : I \rightarrow X$ drogą od x_1 do x_2 , to te drogi wyznaczają drogę $\sigma + \tau$, łączącą x_0 i x_2 , określoną wzorami

⁽¹⁾ Twierdzenie z teorii powierzchni. Dowód można złożyć np. z twierdzeń dowiedzionych w książce W. Massey'a, *Algebraic Topology; An Introduction*, 1967, rozdz. IV. 5.

⁽²⁾ Przez rozmaitość zamkniętą rozumie się przestrzeń zwartą T_2 , której każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z wnętrzem kuli euklidesowej; z twierdzenia Brouwera o zachowaniu otwartości wynika, że wymiary kul, o których mowa, są wszystkie takie same; przyjęte warunki implikują ośrodkowość, a w rezultacie metryzowalność. Rozmaitości wymiaru 2 są nazywane *powierzchniami*.

$$(\sigma + \tau)(s) = \begin{cases} \sigma(2s), & \text{jeśli } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \tau(2s - 1), & \text{jeśli } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Określenie jest tak pomyślane, by droga $\sigma + \tau$ była nadal określona na odcinku jednostkowym.



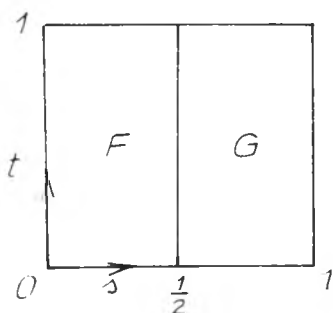
Rys. 111. Droga $\sigma + \tau$

Twierdzenie. Jeśli $\sigma \simeq \sigma'$ i $\tau \simeq \tau'$, to $\sigma + \tau \simeq \sigma' + \tau'$.

Dowód. Jeśli F jest homotopią realizującą równoważność $\sigma \simeq \sigma'$, a G homotopią realizującą równoważność $\tau \simeq \tau'$, to homotopię H realizującą równoważność $\sigma + \tau \simeq \sigma' + \tau'$ określamy wzorem

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t), & \text{jeśli } 0 \leq s \leq 1/2, \\ G(2s - 1, t), & \text{jeśli } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

dla wszelkich t .



Rys. 112. Homotopia H jest połączeniem homotopii F i G

Łatwo sprawdzić poprawność określenia (zgodność wzorów dla $s = 1/2$) i to, że homotopia H zachowuje końce x_0 i x_2 , co wynika stąd, że homotopie F i G zachowują końce dróg.

Dowiedzione twierdzenie pozwala na przeniesienie dodawania dróg na klasy dróg równoważnych.

Niech $\alpha = [\sigma]$ będzie klasą dróg równoważnych drodze σ od x_0 do x_1 , a $\beta = [\tau]$ klasą dróg równoważnych drodze od x_1 do x_2 . Określamy $\alpha + \beta$ jako klasę dróg równoważnych drodze $\sigma + \tau$ od x_0 do x_2 ; mamy

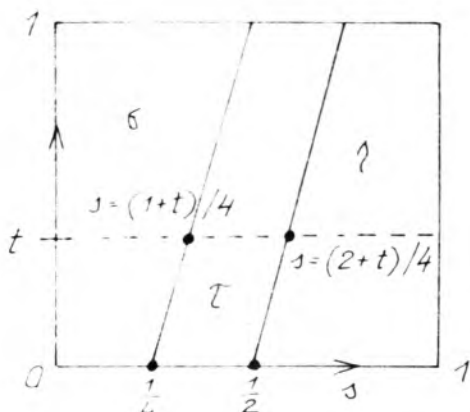
$$(1) \quad \alpha + \beta = [\sigma + \tau]$$

Prawa strona nie zależy od wyboru reprezentantów w klasach α i β , co wynika z dowiedzonego twierdzenia.

Twierdzenie. Dodawanie klas równoważności dróg jest łączne: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Dowód. Niech $\alpha = [\sigma]$, $\beta = [\tau]$ i $\gamma = [\eta]$. Mamy wykazać, że $\sigma(\tau + \eta) \simeq (\sigma + \tau) + \eta$. Homotopią realizującą tę równoważność jest odwzorowanie H dane wzorami

$$H(s, t) = \begin{cases} \sigma(4s/(1+t)), & \text{jeśli } 0 \leq s \leq (1+t)/4, \\ \tau(4s - 1 - t), & \text{jeśli } (1+t)/4 \leq s \leq (2+t)/4, \\ \eta((4s - 1)/(1+t)), & \text{jeśli } (2+t)/4 \leq s \leq 1. \end{cases}$$



Rys. 113. Łączność dodawania dróg

Jeśli $\sigma : I \rightarrow X$ jest drogą od x_0 do x_1 , to odwzorowanie $-\sigma : I \rightarrow X$ określone wzorem

$$(-\sigma)(s) = \sigma(1-s), \quad 0 \leq s \leq 1,$$

jest drogą od x_1 do x_0 ; nazywamy je drogą przeciwną do σ .

Twierdzenie. Jeśli $\sigma \simeq \sigma'$, to $-\sigma \simeq -\sigma'$.

Dowód. Jeśli H jest homotopią realizującą równoważność $\sigma \simeq \sigma'$, to homotopią realizującą równoważność $-\sigma \simeq -\sigma'$ jest odwzorowanie G dane wzorem $G(s, t) = H(1-s, t)$.

To twierdzenie pozwala przenieść operację „—” na klasy dróg równoważnych: jeśli $\alpha = [\sigma]$ jest klasą dróg równoważnych drodze σ , to przyjmujemy

$$(2) \quad -\alpha = [-\sigma].$$

Jeśli $\sigma : I \rightarrow X$ jest drogą zaczynającą się w x_0 , to połączenie $\sigma + (-\sigma)$ jest pętlą w x_0 .

Ustalmy punkt. Oznaczmy przez 0 klasę równoważności dróg, do której należy droga stała w tym punkcie.

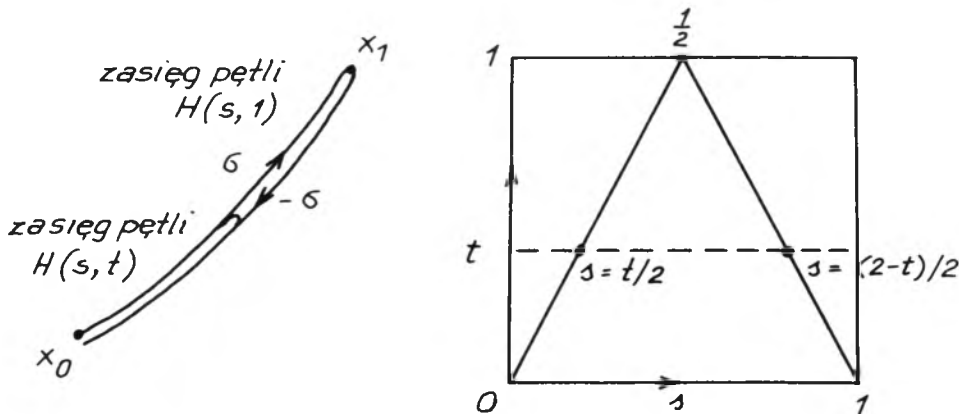
Twierdzenie. $\alpha + (-\alpha) = 0$.

Dowód. Niech $\sigma : I \rightarrow X$, $\sigma(0) = x_0$, będzie reprezentantem klasy α . Określimy homotopię zaczynającą się od drogi zerowej w x_0 i kończącej się na pętli $\sigma + (-\sigma)$, tj. na pętli określonej wzorami

$$\eta(s) = \begin{cases} \sigma(2s), & \text{jeśli } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \sigma(2s-1), & \text{jeśli } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Pętli zerowej pozwalamy stopniowo narastać tak, że w chwili t , $0 \leq t \leq 1$, jest ona pętlą

$$H(s, t) = \begin{cases} \sigma(2s), & \text{jeśli } 0 \leq s \leq t/2, \\ \sigma(t), & \text{jeśli } t/2 \leq s \leq (2-t)/2, \\ \sigma(2-2s), & \text{jeśli } (2-t)/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

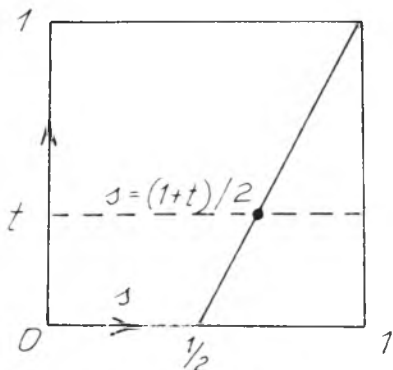


Rys 114. $\alpha + (-\alpha) = 0$

Przy ustalonym t wzór na $H(s, t)$ przedstawia pętlę, która na odcinku $0 \leq s \leq t/2$ ma przebieg ten, co droga od jej punktu początkowego do jej punktu $\sigma(t)$. Na odcinku $t/2 \leq s \leq (1-t)/2$ przyjmuje wartość stałą $\sigma(t) = -\sigma(1-t)$, na odcinku $(2-t)/2 \leq s \leq 1$ ma przebieg powrotny po drodze $-\sigma$.

Dla $t = 1$ wzór na H daje pętlę $\sigma + (-\sigma)$, a dla $t = 0$ pętlę zerową w x_0 .

Ciągłość odwzorowania H wynika stąd, że jest ono połączeniem odwzorowań ciągłych na trójkątach I, II i III (por. rys. 6), zgodnych w punktach wspólnych tych trójkątów.



Rys. 115. $\alpha + 0 = \alpha$

Twierdzenie. $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.

Dowód. Niech $\sigma : I \rightarrow X$ będzie drogą od x_0 do x_1 , reprezentującą klasę równoważności α . Niech x_1 oznacza drogę zerową w x_1 . Wykażemy, że $\sigma \simeq \sigma + x_1$. Homotopią realizującą równoważność jest odwzorowanie H dane wzorami:

$$H(s, t) = \begin{cases} \sigma(2s/(1+t)), & \text{jeśli } 0 \leq s \leq (1+t)/2, \\ x_1, & \text{jeśli } (1+t)/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Dowiedliśmy w szczególności, biorąc $x_0 = x_1$, że $\alpha + 0 = \alpha$. Dowód równości $0 + \alpha = \alpha$ przebiega podobnie.

Ustalmy punkt x_0 w przestrzeni X . Zbiór $\pi_1(X, x_0)$ klas równoważności relacji \simeq na zbiorze pętli w x_0 jest grupą ze względu na (określoną wzorem (1)) operacją $+$, dla której (określona wzorem (2)) operacja $-$ jest operacją przejścia do elementu przeciwnego, a klasa 0 pętli równoważnych pętli zerowej jest elementem neutralnym. Wykazaliśmy bowiem, że

$$(3) \quad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma,$$

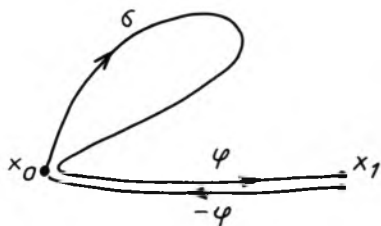
$$(4) \quad \alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0,$$

oraz że

$$(5) \quad \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha.$$

Zbiór $\pi_1(X, x_0)$ z działaniem $+$ jest nazywany *grupą podstawową przestrzeni X w punkcie x_0* ⁽³⁾.

Jeśli dwa punkty w X dają się połączyć drogą, to grupy podstawowe przestrzeni X w tych punktach są izomorficzne. Będzie to wniosek z twierdzeń, które teraz udowodnimy. Wyniknie stąd, że jeśli przestrzeń X jest łukowo spójna (4), to z dokładnością do izomorfizmu grupy podstawowe we wszystkich punktach przestrzeni są te same i wtedy można mówić o *grupie podstawowej przestrzeni X* . Grupa ta będzie oznaczona symbolem $\pi_1(X)$.



Rys. 116. Pętla $(-\varphi) + \sigma + \varphi$

Przechodząc do szczegółów, niech $\varphi : I \rightarrow X$ będzie drogą od x_0 do x_1 . Jeśli σ jest pętlą w x_0 , to $(-\varphi) + \sigma + \varphi$ jest pętlą w x_1 .

Twierdzenie. Jeśli $\sigma \simeq \sigma'$, to $(-\varphi) + \sigma + \varphi \simeq (-\varphi) + \sigma' + \varphi$.

Dowód. Jeśli F jest homotopią łączącą σ i σ' , to homotopią łączącą $(-\varphi) + \sigma + \tau$ i $(-\varphi) + \sigma' + \varphi$ jest odwzorowanie dane wzorem

$$H(s, t) = \begin{cases} \varphi(1 - 3s), & \text{jeśli } 0 \leq s \leq t/3, \\ F(3s - 1), & \text{jeśli } 1/3 \leq s \leq 2/3, \\ \varphi(3 - 2s), & \text{jeśli } 2/3 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

⁽³⁾ Pojęcie grupy podstawowej, dalekie od obecnej formy, pochodzi od Poincarégo; Henri Poincaré, *Analysis situs*, J. Ecole Polytechnique 1 (1895), s. 1—121. O początkowym okresie teorii por. B. Chandler i W. Magnus, *The history of combinatorial group theory*, Springer, 1982.

Grupa podstawowa jest pierwszą spośród wprowadzonych później przez Witolda Hurewicza grup homotopii $\pi_n(H)$, do których określenia służą odpowiednio rozumiane klasy homotopii odwzorowań sfer S^n w przestrzeń X ; teoria wyłożona między innymi w książce *An Introduction to Homotopy Theory* (Cambridge University Press, 1953) P. J. Hiltona.

Z twierdzenia tego wynika istnienie odwzorowania φ_+ wyznaczonego przez φ — zbioru $\pi_1(X, x_0)$ w zbiór $\pi_1(X, x_1)$ — określonego wzorem

$$\varphi_+(\alpha) = [(-\varphi) + \sigma + \varphi]$$

dla α należących do $\pi_1(X, x_0)$, gdzie σ jest pętlą reprezentującą element α .

Twierdzenie. *Odwzorowanie φ_+ jest izomorfizmem.*

D o w ó d 1. φ_+ jest homomorfizmem. Niech σ i τ będą pętlami w x_0 . Należy wykazać, że $\varphi_+([\sigma]) + \varphi_+([\tau]) = \varphi_+([\sigma] + [\tau])$.

Wynika to z równości

$$\begin{aligned} ((-\varphi) + \sigma + \varphi) + ((-\varphi) + \tau + \varphi) &\simeq ((-\varphi) + \sigma) + ((\varphi + (-\varphi)) + (\tau + \varphi)) = \\ &((- \varphi) + \sigma) + (\tau + \varphi) \simeq (-\varphi) + (\sigma + \tau) + \varphi, \end{aligned}$$

wynikających bezpośrednio z wzorów (3) — (5).

2. φ_+ jest izomorfizmem. Homomorfizmem odwrotnym do φ_+ jest $(-\varphi)_+$. Dla dowolnej pętli σ w x_0 mamy bowiem

$$\varphi + ((-\varphi) + \sigma + \varphi) + (-\varphi) \simeq \sigma,$$

na mocy rachunku podobnego do poprzedniego, a dla dowolnej pętli τ w x_1 mamy

$$(-\varphi) + (\varphi + \sigma + (-\varphi)) + \varphi = \tau.$$

Twierdzenie. *Jeśli $\varphi \simeq \psi$, to $\varphi_+ = \psi_+$.*

D o w ó d. Niech F będzie homotopią łączącą drogi φ i ψ . Odwzorowanie H dane wzorem

$$H(s, t) = \begin{cases} F(1 - 3s, t), & \text{jeśli } 0 \leq s \leq 1/3, \\ \sigma(3s - 1), & \text{jeśli } 1/3 \leq s \leq 2/3, \\ F(3s - 2, t), & 2/3 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

dla $0 \leq t \leq 1$, jest homotopią łączącą drogi $-\varphi + \sigma + \varphi$ i $-\psi + \sigma + \psi$.

* * *

Przestrzenie (łukowo spójne), których grupa podstawowa jest trywialna, są nazywane przestrzeniami *jednospójnymi*⁽⁴⁾.

Twierdzenie. *Przestrzenie ściągające są jednospójne*⁽⁵⁾.

⁽⁴⁾ Założenie łukowej spójności jest równoważne założeniu, że każde dwa punkty przestrzeni dają się połączyć drogą (por. przypis (2) do wykładu 5).

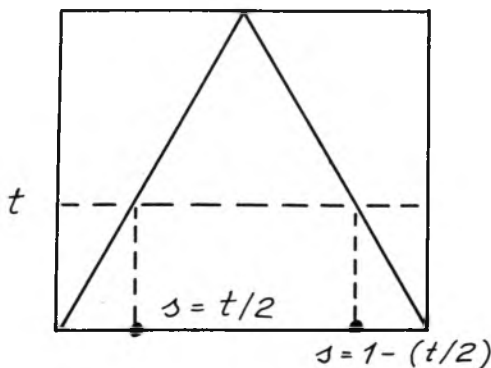
⁽⁵⁾ Brzeg obszaru płaskiego ograniczonego, w którym wszystkie pętle są zerowe, ma jedną składową; stąd nazwa jednospójność. Są obszary dwuspójne, np. pierścień płaski, których brzegi mają więcej niż jedną składową, co wskazuje, jak rozumieć *n-spójność*. Terminologia pochodzi jeszcze od Riemanna. W przestrzeni ten związek między grupą podstawową a budową brzegu obszaru ztraca się.

D o w ó d. Niech X będzie przestrzenią ściągającą. Niech a będzie punktem przestrzeni X . Niech H będzie deformacją przestrzeni X do punktu a . W trakcie tej deformacji punkt a przebiega pętlę wracającą do a , daną wzorem $\tau(t) = H(a, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Dla dowodu, że grupa $\pi_1(X, a)$ jest trywialna, rozważmy dowolną pętlę σ w punkcie a . Pokażemy, że $\sigma \simeq a$, jeśli da się wykazać, że $\sigma \simeq \tau + (-\tau)$.

Homotopię G łączącą pętle σ i $\tau + (-\tau)$ określa wzór

$$G(s, t) = \begin{cases} \tau(s), & \text{jeśli } 0 \leq s \leq t/2, \\ H(\sigma(s/(1-t)) \dots (t/2)/(1-t)t), & \text{jeśli } t/2 \leq s \leq 1 - (t/2), \\ \tau(2-2s), & \text{jeśli } 1 - (t/2) \leq s \leq 1. \end{cases}$$



Rys. 117. $\sigma \simeq \tau + (-\tau)$

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Wiemy, że sfery S^n nie są ściągające. Tymczasem,

Twierdzenie. Sfery S^n , $n \geq 2$, są jednospójne.

D o w ó d. Niech $\sigma : I \rightarrow S^n$ będzie pętlą w punkcie a . Niech T będzie triangulacją sfery S^n taką, że a jest jednym z jej wierzchołków. Patrząc na dowód twierdzenia o aproksymacji sympleksyjnej, widać, że można tak dobrać aproksymację g pętli σ , by $g(0) = g(1) = a$. Punkty 0 i 1 należą do $\sigma^{-1}(gw_{|K|}a)$ i przy dostatecznie drobnym podziale P odcinka I jest $gw_{|P|}0 \subset \sigma^{-1}(gw_{|T|}a)$ i $gw_{|P|}1 \subset \sigma^{-1}(gw_{|T|}a)^{(6)}$. Homotopię H między σ i g

⁽⁶⁾ W dowodzie można by się posłużyć, chociaż jest to środek dla tych celów zbyt mocny, zrelatywizowaną wersją twierdzenia o aproksymacji sympleksyjnej, daną przez Zeemana, cytowaną w wykładzie 2 (s. 61).

Niektóre książki z wykładem teorii grupy podstawowej: R. H. Crowell i R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, 1963 (tłum. ros. z 1967 r.); C. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press 1980 (tłum. ros. z 1983 r.); M. J. Greenberg, *Wykłady z topologii algebraicznej* (tłum. z ang.), Warszawa 1980.

da się określić wtedy wzorem $H(x, t) = tg(x) + (1-t)\sigma(x)$, $0 \leq t \leq 1$; jest przy tym $H(0, t) = H(1, t) = a$ dla każdego t , wobec $g(0) = g(1) = a$ i $\sigma(0) = \sigma(1) = a$. Mamy więc $\sigma = g$ w sensie równoważności pętli. Obraz pętli g , kawałkami liniowej, nie pokrywa sfery S^n , jeśli $n \geq 2$. Pętla g zatem jest zerowa, ponieważ można ją zdeformować do punktu a wraz z całą sferą S^n po usunięciu zeń spoza obrazu pętli g .

W następnym wykładzie zobaczymy, że grupa podstawowa okręgu S^1 nie jest trywialna, tj. że okrąg nie jest jednospójny.

Jednospójność była zapowiedziana na wstępie przez warunek polegający na tym, że każde dwie drogi łączące dwa dowolne punkty są ze sobą równoważne, a potem była określona warunkiem zerowania się grupy podstawowej, który wynika z poprzedniego. Określenia są równoważne.

Dla dowodu wystarczy wiedzieć, że:

Drogi σ i τ łączące punkty x_0 i x_1 są równoważne, jeśli pętla $\sigma + (-\tau)$ jest równoważna zerowej.

Uwaga przed dowodem: Wynikanie odwrotne jest prawdziwe, ale jego prosty dowód jest opuszczony, ponieważ nie będziemy zeń w dalszym ciągu korzystać.

Dowód. Niech H będzie homotopią realizującą równoważność pętli $\sigma + (-\tau)$ z pętlą zerową w x_0 . Pętla $\sigma + (-\tau)$ zapisuje się wzorem

$$(\sigma + (-\tau))(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{dla } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \tau(2 - 2s) & \text{dla } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

a homotopia H spełnia warunki

$$H(s, 0) = x_0 \text{ i } H(s, 1) = (\sigma + (-\tau))(s)$$

dla $0 \leq s \leq 1$, i

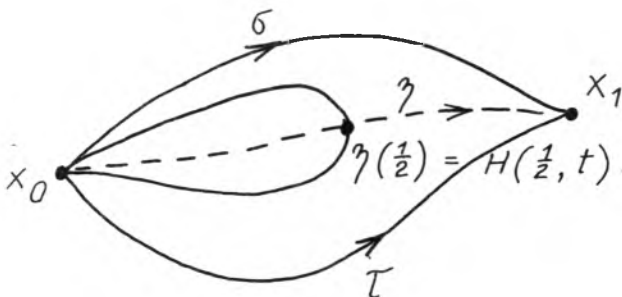
$$H(1, t) = x_0$$

dla $0 \leq t \leq 1$.

Niech $\eta : I \rightarrow X$ będzie drogą, którą przechodzi w trakcie homotopii punkt x_1 odpowiadający wartości $s = 1/2$ na pętli $\sigma + (-\tau)$.

Mamy

$$172 \quad (6) \quad \eta(t) = H(1/2, t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$



Rys. 118. Droga η

Wystarczy, że określimy homotopię G łączącą σ z η taką, że $G(0, t) = x_0$ i $G(1, t) = x_1$ dla każdego t ; mając analogicznie określoną homotopię łączącą η z τ , przez zesztukowanie dostaniemy homotopię łączącą drogę σ z drogą τ .

Zapowiedzianą homotopię G określamy wzorami

$$G(u, t) = \begin{cases} H(u/t, t), & \text{jeśli } 2u \leq t \text{ i } t \neq 0, \\ \eta(2u), & \text{jeśli } 2u \geq t, \end{cases}$$

drugi z wzorów daje $G(0, 0) = x_0$; dziedziną homotopii G jest zbiór $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq u \leq 1/2$.

Mamy $G(u, 0) = \eta(2u) = H(1/2, 2u)$ i $G(u, 1) = \sigma(2u)$ dla $0 \leq u \leq 1/2$. Mamy poza tym $G(0, t) = x_0$ i $G(1/2, t) = H(1/2, t) = x_1$.

Pozostaje dowieść ciągłości G .

Zauważmy najpierw, że dla $2u = t$ wzory określające G zgadzają się: pierwszy daje $H(1/2, t)$, a drugi $\eta(t)$, a więc to samo, na mocy (6).

Wzory zapewniają ciągłość wszędzie poza $(0, 0)$.

Wykażemy, że $H(u/t, t) \rightarrow x_0$, jeśli $u \rightarrow 0$ i $t \rightarrow 0$, co zapewni ciągłość w $(0, 0)$.

Wystarczy rozważyć zakres $2u \leq t$; jest wtedy zawsze $0 < u/t \leq 1/2$ (więc $(u/t, t)$ należy do zakresu określoności H).

Niech będzie dane $\varepsilon > 0$. Wobec $H(s, 0) = x_0$ dla wszelkich s istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $0 < t \leq \delta$, to odległość punktu x_0 od $H(x, t)$ nie przekracza ε . Zatem odległość $H(u/t, t)$ od x_0 zatem nie przekracza ε , jeśli $0 < t \leq \delta$.

* * *

Niech $f: X \rightarrow Y$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Jeśli $\sigma: I \rightarrow X$ jest pętlą w a , to złożenie $f \circ \sigma$ jest pętlą w $f(a)$.

Zauważmy, że jeśli $\sigma \simeq \sigma'$, to $f \circ \sigma \simeq f \circ \sigma'$.

Istotnie, jeśli H jest homotopią realizującą równoważność $\sigma \simeq \sigma'$, to odwzorowanie

$$G(s, t) = f(H(s, t)), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1$$

realizuje równoważność $f \circ \sigma \simeq f \circ \sigma'$.

Odwzorowanie f wyznacza więc odwzorowanie

$$f_* : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(Y, f(a))$$

grup podstawowych, dane wzorem $f_*([\sigma]) = [f \circ \sigma]$, dla $[\sigma] \in \pi_1(X, a)$.

Odwzorowanie f_* jest homomorfizmem.

Niech bowiem σ i τ będą pętlami w a . Łatwo widzieć, że $f \circ (\sigma + \tau) = f \circ \sigma + f \circ \tau$. Stąd już zapowiedziane stwierdzenie dostaje się prostym rachunkiem:

$$\begin{aligned} f_*([\sigma] + [\tau]) &= f_*([\sigma + \tau]) = [f \circ (\sigma + \tau)] = [f \circ \sigma + f \circ \tau] = \\ &= [f \circ \sigma] + [f \circ \tau] = f_*([\sigma]) + f_*([\tau]). \end{aligned}$$

Dla odwzorowania złożonego $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ odwzorowanie $(g \circ f)_*$ jest homomorfizmem grupy $\pi_1(X, a)$ w grupę $\pi_1(Z, g(f(a)))$. Łatwo się sprawdza, że

$$(7) \quad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*,$$

gdzie g_* jest homomorfizmem grupy $\pi_1(Y, f(a))$ w grupę $\pi_1(Z, g(f(a)))$.

Formalnością jest stwierdzenie, że dla odwzorowania tożsamościowego 1_X przestrzeni X jest

$$(8) \quad (1_H)_* = 1_{\pi_1(X, a)},$$

gdzie symbol po prawej stronie znaczy tożsamość na $\pi_1(H, a)$.

Z ostatnich dwu stwierdzeń wynika, że jeśli f jest homeomorfizmem $X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow X$ jest homeomorfizmem doń odwrotnym, co znaczy, że $g \circ f = 1_X$ i $f \circ g = 1_Y$, to oba złożenia $g_* \circ f_*$ i $f_* \circ g_*$ są tożsamościami. Wynika stąd, że f_* i g_* są wzajemnie odwrotnymi izomorfizmami grup $\pi_1(X, a)$ i $\pi_1(Y, b)$, gdzie $b = f(a)$.

Wykazaliśmy więc, że jeśli przestrzenie są homeomorficzne, to ich grupy podstawowe w punktach sobie odpowiadających są izomorficzne.

Dowiedzione twierdzenie o homomorfizmach f_* uwiadczniają prawidłowość, zauważoną w szerszym zakresie (grup homologii, kohomologii, homo-

topii (w wyższych wymiarach) i innych) przez Eilenberga i MacLane'a (1945), wyrażającą się tym, że na teorię grupy podstawowej można patrzeć jak na przekład stwierdzeń o przestrzeniach topologicznych i ich odwzorowaniach ciągłych na stwierdzenia o grupach i ich homomorfizmach. Tłumaczenie zachowuje tożsamości i złożenia. Mówi się też, że teoria grupy podstawowej określa *funktor* przekształcający *kategorię* przestrzeni topologicznych i ich odwzorowań ciągłych w kategorię grup i ich homomorfizmów. Metoda ta została rozwinięta w *teorię kategorii i funktorów*, po raz pierwszy wyłożoną w książce przez Eilenberga i Steenroda (1952)⁽⁷⁾. Teoria kategorii jest szczególnie użyteczna w takich działach matematyki jak: topologia ogólna, algebra ogólna i analiza funkcjonalna, w których pojęcie odwzorowania steruje budową dalszych pojęć.

O homomorfizmach wyznaczonych przez odwzorowania ciągłe $X \rightarrow Y$ można powiedzieć więcej. Mianowicie, jeśli f i g mają te same wartości w punkcie wyróżnionym a i jeśli istnieje homotopia $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ łącząca f i g taka, że $H(a, t)$ jest dla każdego t równe wspólnej wartości c odwzorowań f i g w punkcie a , to

$$f_* = g_*.$$

rozumiejąc, że f_* i g_* są homomorfizmami $\pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(Y, c)$.

Jest tak, bo jeśli σ jest pętlą w a , to pętle $f \circ \sigma$ i $g \circ \sigma$ w c są równoważne wobec istnienia homotopii $G(s, t) = H(\sigma(s), t)$, $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$, utrzymującej przy zmieniającym się t punkt $c = f(a) = g(s)$.

Niech $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow X$ będą odwzorowaniami ciągłymi takimi, że dla wyróżnionego w X punktu a jest $f(a) = b$ i $g(b) = a$. Jeśli

$$g \circ f \simeq 1_X \quad \text{i} \quad f \circ g \simeq 1_Y,$$

przy czym homotopie realizujące te relacje nie zmieniają położenia punktów a i b , to f_* i g_* są wzajemnie odwrotnymi izomorfizmami grup $\pi_1(X, a)$ i $\pi_1(Y, b)$.

Wynika to z ostatnio dowiedzionego stwierdzenia wobec wcześniej dowiedzionych związków (7) i (8).

Wstęga Möbiusa ma retrakcję $r : M \rightarrow S^1$ na swoją linię środkową (por. wykład 5, s. 127). Niech $i : S^1 \subset M$ będzie inkluzją. Mamy

⁽⁷⁾ S. Eilenberg, N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton 1952; tłum. ros., Moskwa 1958, rozdz. IV. Tam odnośnik do Eilenberga i MacLane'a. Po polsku teoria kategorii jest wyłożona w książce Z. Semadeniego i A. Wiwegera, *Wstęp do teorii kategorii i funktorów*, Warszawa 1972, a także w książce autora *Wykłady z topologii, Cz. I, Wstęp z teorii kategorii*, Katowice 1971.

(9)

$$r \circ i = 1_{S^1}.$$

Punkt $*$ = $q(0, 1/2)$ wstęgi Möbiusa — gdzie q jest odwzorowaniem sklejającym kwadrat $K = [0,1] \times [0,1]$ do wstęgi Möbiusa — leżący na jej linii środkowej, jest zachowywany przez odwzorowania i i r , $r(*) = *$ i $i(*) = *$.

Złożenie $i \circ r : M \rightarrow M$ jest homotopijne z tożsamością na M , tj.

(10)

$$i \circ r \simeq 1_M,$$

a homotopia może być tak dobrana, by zachowywała punkt wyróżniony $*$.

Istnienie wspomnianej homotopii jest konsekwencją istnienia odwzorowania H' kwadratu K w siebie, które jest dane wzorem $(H'(x, y), t) = (x, \frac{1}{2} + (1-t)(y - \frac{1}{2}))$, gdzie (x, y) przebiega punkty rozważanego kwadratu i $0 \leq t \leq 1$, które jest homotopią łączącą tożsamość na kwadracie K z retrakcją kwadratu K na odcinek $y = \frac{1}{2}$. Zapowiedzianą homotopię określamy wzorem

$$H(z, t) = q(H'(x, y), t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

gdzie (x, y) jest punktem takim, że $q(x, y) = z$. Mogą być dwa tego rodzaju punkty dla danego z . Jeśli jednym z nich jest $(0, y)$, to drugim jest $(1, 1 - y)$, ale $H'(0, y) = H'(1, 1 - y)$, co zapewnia poprawność określenia homotopii H .

Równość

$$H(*, t) = *$$

dla każdego t , $0 \leq t \leq 1$, jest oczywiste.

Wobec (10), na mocy ostatniego z dowiedzionych twierdzeń, wnioskujemy, że złożenie

$$\pi_1(M, *) \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1, *) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M, *)$$

jest tożsamością, a wobec (9) tożsamością jest również złożenie

$$\pi_1(S^1, *) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M, *) \xrightarrow{r_*} \pi_1(S^1, *)$$

Wniosek. Wstęga Möbiusa i okrąg mają izomorficzne ze sobą grupy pod-
176 stawowe (wzajemnie odwrotnymi izomorfizmami są i_* i r_*).

Podobne rozumowanie prowadzi do wniosku, że *pobocznicą walca ma tę samą grupę podstawową, co okrąg*.

Widzimy więc, że grupa podstawowa nie uwidacznia różnicy między wstęgą Möbiusa a poboczną walca, mimo że są to przestrzenie wyraźnie się różniące. Nie są homeomorficzne, co wynika stąd, że pobocznicą walca jest spłaszczalna (jest homeomorficzna z pierścieniem płaskim), a wstęga Möbiusa nie (por. wykład 5, s. 127).

Retrakcja wstęgi Möbiusa na jej linię środkową jest specjalnego rodzaju: okazała się (po nałożeniu nań inkluzji, patrz wzór (10)) homotopijna z tożsamością, a więc okazała się deformacją do linii środkowej. Linia środkowa jest w ten sposób *retraktem deformacyjnym* wstęgi Möbiusa (dowiedliśmy więcej, a mianowicie, że punkt wyróżniony na linii środkowej nie zmienia położenia w trakcie deformacji).

Oczywiście, nie każda retrakcja jest retrakcją deformacyjną; sferę można zretrahować do punktu, ale nie można jej do punktu zdeformować.

WYKŁAD 9. Pętle i drogi na okręgu • Nakrycie okręgu prostą • Podnoszenie dróg • Podnoszenie homotopii • Stopień pętli • Grupa podstawowa okręgu jest izomorficzna z grupą liczb całkowitych • Zastosowanie metody: dowód zasadniczego twierdzenia algebry • Twierdzenie Brouwera w wymiarze 2 • Nieistnienie retrakcji wstęgi Möbiusa na jej brzeg

Niech $S^1 = \{z : |z| = 1\}$ będzie okręgiem reprezentowanym przez zbiór liczb zespolonych z o module 1. Będziemy rozważać drogi i pętle na S^1 zaczepione w punkcie $z = 1$.

Przykładami tego rodzaju pętli są odwzorowania $e_n : I \rightarrow S^1$ dane wzorami

$$e_n(x) = e^{2\pi i n x}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

polegające na n -krotnym nawinięciu odcinka $\{x : 0 \leq x < 1\}$ na okrąg.

Korzystamy z zapisu liczby zespolonej z o module 1 w postaci $z = e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$, w którym x jest kątem liczonym od dodatniego kierunku osi rzeczywistej z miarą kąta pełnego przyjętą za 1.

Wzór

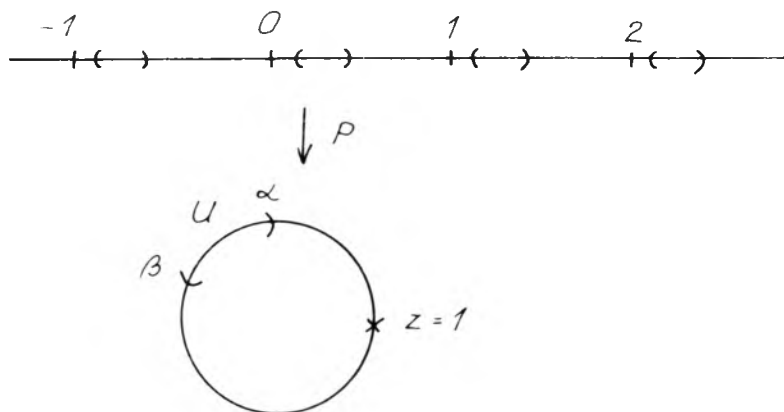
$$z = e^{2\pi i x}$$

określa odwzorowanie ciągle $p : E \rightarrow S^1$ prostej rzeczywistej E na okrąg, polegające — trzymając się użytego już zwrotu — na nawinięciu prostej na okrąg nieskończenie wiele razy. Odwzorowanie p jest nazywane *nakryciem* (wzorcowym) okręgu przez prostą.

Własności arytmetyczne odwzorowania p .

Przeciwobrazem punktu $z = 1$ jest zbiór Z liczb całkowitych. Ogólniej, przeciwobrazem punktu $z = e^{2\pi i x}$ jest zbiór liczb $x + n$, $n \in Z$.

Niech U będzie łukiem bez końców położonym na $|z| = 1$. Przeciwobraz $p^{-1}(U)$ jest sumą przedziałów V_n , $n \in \mathbb{Z}$, prostych, rozłącznych i będących przesunięciami jeden drugiego o liczbę całkowitą i z których każdy jest przeprowadzony przez p homeomorficznie na U .



Rys. 119. Nakrycie okręgu prostą

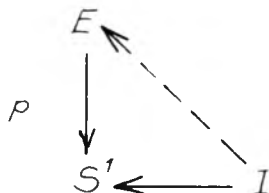
Przedziały V_n są przesunięciami o n przedziału V_0 , który ustalimy następująco. Jeśli łuk U jest wyznaczony przez kąt między α i β , $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ (co znaczy, że punkt $z = 1$ do U nie należy), to przedziałem V_0 jest przedział od $\alpha/2\pi$ do $\beta/2\pi$ prostej. Jeśli łuk U jest wyznaczony przez kąt między α i β , gdzie $\alpha < 0$ i $\beta > 0$, to przedziałem V_0 jest przedział określony arytmetycznie jak poprzednio; nie mieści się wszakże już w przedziale $0 < x < 1$.

Twierdzenie o podnoszeniu dróg. Niech $\sigma : I \rightarrow S^1$ będzie drogą. Istnieje dokładnie jedna droga $\sigma' : I \rightarrow E$ taka, że

$$(1) \quad p \circ \sigma' = \sigma,$$

$$(2) \quad \sigma'(0) = e_0,$$

gdzie e_0 jest danym z góry punktem w E takim, że $p(e_0) = \sigma(0)$; równość (1) ilustruje diagram



Uwagi przed dowodem. Droga σ nazywana jest *podniesieniem drogi* σ , jeśli spełnia warunek (1). Warunek początkowy (2) determinuje drogę σ' , a w szczególności jej punkt końcowy $\sigma'(1)$.

Dowód jedyności σ' nie będzie wymagał (poza spełnieniem warunku początkowego) niczego więcej niż wykorzystania spójności odcinka, dziedziny odwzorowania σ . Ta uwaga zwolni nas od powtarzania dowodu jedyności, podniesienia w następnych twierdzeniach, jeśli dziedzina odwzorowania będzie spójna.

Dowód. Jest co najwyżej jedno podniesienie.

Niech σ' i σ'' będą podniesieniami drogi σ takimi, że

$$\sigma'(0) = \sigma''(0).$$

Zbiór

$$(3) \quad \{s : \sigma(s) = \sigma''(s)\}$$

jest domknięty, co wynika z ciągłości σ i σ'' . Jest niepusty, bo należy doń 0.

Pokażemy, że zbiór (3) jest otwarty, co zakończy dowód, bo ze spójności odcinka i niepustości zbioru (3) wyniknie, że zbiór (3) jest całym odcinkiem — tj. równość dróg σ i σ'' wszędzie.

Dla dowodu otwartości zbioru (3) weźmy dowolny punkt s_* tego zbioru. Mamy $\sigma'(s_*) = \sigma(s_*)$. Stąd, $p(\sigma'(s_*)) = p(\sigma''(s_*)) = \sigma(s_*)$. Weźmy na okręgu S^1 łuk U będący otoczeniem otwartym punktu $\sigma(s_*)$ i ten spośród przedziałów składowych V przeciwobrazu $p^{-1}(U)$, do którego należy wspólna wartość $\sigma'(s_*) = \sigma''(s_*)$. Niech W będzie przedziałem na odcinku, takim że

$$s_* \in W \quad \text{ i } \quad \sigma(W) \subset U,$$

istniejącym na mocy ciągłości σ . Wobec $p \circ \sigma' = \sigma$ i $p \circ \sigma'' = \sigma$ mamy $\sigma'(W) \subset p^{-1}(U)$ i $\sigma''(W) \subset p^{-1}(U)$. Wobec spójności zbiorów $\sigma'(W)$ i $\sigma''(W)$ oba te zbiory są zawarte w składowych zbioru $p^{-1}(U)$, a ponieważ $\sigma'(s_*) = \sigma''(s_*)$, więc są zawarte w tej samej składowej; niech V będzie tą składową. Jeśli teraz $s \in W$, to wartości σ' i σ'' w punkcie s muszą być równe, bo jeśli byłyby różne, to wobec różnowartościowości odwzorowania $p|_V$ wartości $p \circ \sigma'$ i $p \circ \sigma''$ w punkcie s byłyby różne. Sprzeczność.

Istnienie podniesienia. Niech

$$0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1} < 1 = s_n$$

będzie podziałem odcinka I takim, że żaden z obrazów $\sigma([s_{k-1}, s_k])$ nie wypełnia całego okręgu S^1 . Podniesienie będziemy określać stopniowo, poczynając od pierwszego odcinka podziału, przedłużając już określone przedłużenie na odcinek następny.

Przyjmujemy $\sigma'(0) = e_0$. Uznajemy, że σ' jest już określone na odcinku $[0, s_k]$ tak, by warunek (1) był spełniony w punktach tego odcinka. Ponieważ obraz $\sigma([s_k, s_{k+1}])$ nie pokrywa całości S^1 , więc istnieje łuk W na S^1 taki,

że $\sigma([s_k, s_{k+1}]) \subset W$. Zbiór $p^{-1}(W)$ rozpada się na przedziały, które przechodzą poprzez odwzorowanie p homeomorficznie na W . Niech V będzie tym spośród wymienionych przedziałów, do którego należy $\sigma(s_k)$. Jeśli s leży na odcinku $[s_k, s_{k+1}]$, to $\sigma(s) \in W$ i istnieje dokładnie jeden punkt w $p^{-1}(\sigma(s))$ leżący na V . Ten punkt przyjmujemy jako wartość σ' w punkcie s .

W ten sposób odwzorowanie σ' przedłużyliśmy na odcinek $[0, s_{k+1}]$ z zachowaniem warunku (1). Przedłużenie to pozostaje ciągle, bo $p^{-1}|_W$ jest homeomorfizmem W na V (odwrotnym do $p|_V: V \xrightarrow{\cong} W$).

Powtarzając opisaną operację przedłużenia, po skończonej ilości kroków dostajemy σ' określone na całym odcinku I .

Twierdzenie. *Jeśli σ i τ są równoważnymi ze sobą drogami w S^1 , to ich podniesienia σ' i τ' , spełniające wspólny warunek początkowy, są równoważne; w szczególności, σ' i τ' mają wspólny koniec.*

Dokładniej, mając drogi $\sigma: [0, 1] \rightarrow S^1$ i $\tau: [0, 1] \rightarrow S^1$ o wspólnym początku $\sigma(0) = \tau(0)$ i o wspólnym końcu $\sigma(1) = \tau(1)$ oraz homotopię $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$ realizującą równoważność $\sigma \simeq \tau$, tj. taką, że $H(s, 0) = \sigma(s)$ i $H(s, 1) = \tau(s)$ dla $0 \leq s \leq 1$, oraz taką, że $H(0, t) = u_0$ i $H(1, t) = u_1$ dla $0 \leq t \leq 1$, istnieje dokładnie jedna homotopia $H': [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow E$ taka, że

$$(4) \quad p \circ H' = H \quad \text{ i } \quad (5) \quad H'(0, 0) = e_0,$$

gdzie e_0 jest z góry danym punktem takim, że

$$(6) \quad p(e_0) = u_0.$$

Uwagi przed dowodem. Homotopia H' łączy drogi

$$\sigma'(s) = H'(s, 0) \quad \text{ i } \quad \tau'(s) = H'(s, 1),$$

$0 \leq s \leq 1$, spełniające warunki początkowe $\sigma'(0) = e_0$ i $\tau'(0) = e_0$ (jest bowiem $p(H'(\{0\} \times I)) = H(\{0\} \times I) = \{u_0\}$, skąd $H'(\{0\} \times I) \subset p^{-1}(u_0)$, a w rezultacie $H'(\{0\} \times I) = \{e_0\}$, wobec (5) i spójności odcinka $I = [0, 1]$; daje to w szczególności $H'(0, 1) = \tau(0) = e_0$). Jest ponadto

$$(7) \quad \sigma'(1) = \tau'(1) = H'(1, t) \text{ dla każdego } t$$

(jest bowiem $p(H'(\{1\} \times I)) = H(\{1\} \times I) = \{u_1\}$, skąd $H'(\{1\} \times I) \subset p^{-1}(u_1)$, co daje $H'(1, t) = \text{constans}$, wobec spójności odcinka I). Homotopia H' łączy σ' i τ' , zachowując końce e_0 i $e_1 = \sigma'(1) = \tau'(1)$ obu dróg.

D o w ó d. Jedyność homotopii H' spełniającej (4) i (5) nie wymaga — wobec uwagi przed dowodem twierdzenia o podnoszeniu dróg — osobnego dowodu.

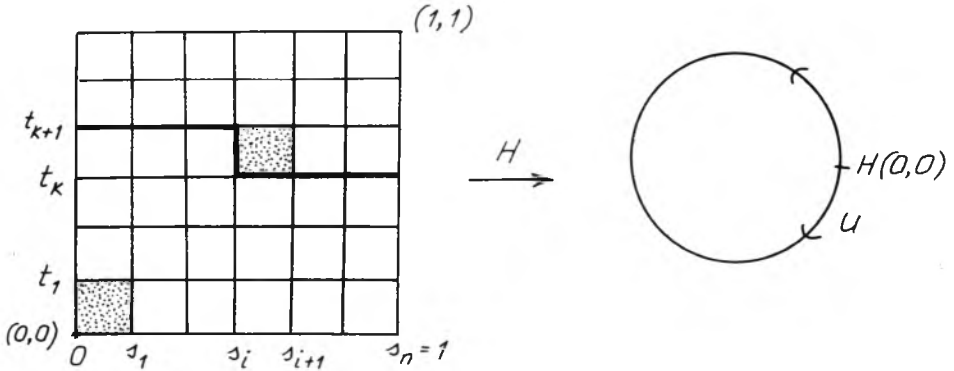
Pozostaje dowieść, że zapowiedziana homotopia H' da się zbudować.

Podzielmy w tym celu kwadrat $[0, 1] \times [0, 1]$, na którym jest określona homotopia H , na kwadraty $[s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$, gdzie

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1,$$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1,$$

na tyle drobne, by były przekształcane przez H na zbiory zawarte w łukach okręgu S^1 – zbiory różne od S^1 .



Rys. 120. Konstrukcja homotopii H'

Odwzorowanie H' określamy najpierw na kwadracie $[0, s_1] \times [0, t_1]$. Weźmy w tym celu łuk U na S^1 taki, że $H([0, s_1] \times (0, t_1]) \subset U$ i tę składową V zbioru $p^{-1}(U)$, do której należy punkt e_0 . Przypomnijmy, że $p|_V$ jest homeomorfizmem V na U . Przyjmujemy $H'(s, t) = (p|_V)^{-1}(H(s, t))$, jeśli $0 \leq s \leq s_1$ i $0 \leq t \leq t_1$.

Dla wspomnianych s i t mamy $p(H'(s, t)) = H(s, t)$, a w szczególności mamy $H'(0, 0) = e_0$.

Będziemy teraz przedłużać odwzorowanie H' na dalsze kwadraty podziału, trzymając się wszakże pewnej kolejności: najpierw przedłużymy H' kolejno na kwadraty drugiej warstwy itd.

Przyjmijmy, że po pewnej ilości kroków zadanie będzie polegało na przedłużeniu zbudowanego już fragmentu odwzorowania H' na kwadrat $[s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$. Przekrój P tego kwadratu z dziedziną dotychczas określonego fragmentu odwzorowania H' jest spójny (jest bokiem wspomnianego kwadratu lub sumą dwu sąsiednich boków; por. z typową sytuacją na rys. 120).

Do przedłużenia H' na kwadrat $[s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ weźmy pod uwagę zbiór $H([s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}])$ i przedział U na S^1 , w którym ten zbiór jest zawarty. Niech V będzie tą składową przeciwobrazu $p^{-1}(U)$, w której leży zbiór (spójny!) $H'(P)$ (zbiór P leży w zbiorze, na którym H' było już dawniej określone).

Przypomnijmy, że $p|V$ jest homeomorfizmem V na U , a więc $(p|V)^{-1}$ jest homeomorfizmem U na V . Na zbiorze P wzór (8) daje wartości takie same, jak dotychczas określone H' . Przedłużenie zostało więc dokonane.

Po skończonej ilości opisanych wyżej operacji odwzorowanie H' zostaje określone na całym kwadracie $[0, 1] \times [0, 1]$. Warunki (4) — (6) zapewnia konstrukcja.

* * *

Dowiedzione twierdzenie jest jedną z wersji ogólnego twierdzenia o podnoszeniu homotopii, które będzie dowiedzione w następnym wykładzie. Przypadkiem specjalnym dowiedzonego twierdzenia jest przypadek pętli zaczepionej w punkcie $z = 1$. Oznaczając ten punkt symbolem $*$, a pętlę przez σ , mamy $\sigma(0) = \sigma(1) = *$.

Wartości podniesienia σ na końcach 0 i 1 odcinka są, wobec $p^{-1}(*) = Z$, liczbami całkowitymi. Korzystając z twierdzenia o jedności podniesienia, nietrudno wnioskujemy, że ich różnica $\sigma'(1) - \sigma'(0)$ jest wyznaczona przez σ . Liczbę całkowitą $\sigma'(1) - \sigma'(0)$ nazywamy *stopniem* pętli σ .

Wobec dowiedzonego twierdzenia o podnoszeniu homotopii, stopień pętli pozostanie ten sam, jeśli ją zastąpimy pętlą z nią równoważną. Dostajemy więc odwzorowanie

$$\pi_1(S^1, *) \rightarrow Z$$

grupy podstawowej okręgu w grupę liczb całkowitych.

Z twierdzenia o jedności podniesienia łatwo wnioskujemy, że przy dodawaniu pętli dodają się ich stopnie, co znaczy, że odwzorowanie $\pi_1(S^1, *)$ jest homomorfizmem w grupę Z .

Jest to odwzorowanie „na”, bo stopnie pętli $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$ wyczerpują Z .

Pokażemy, że jest to izomorfizm.

Wystarczy w tym celu pokazać, że jeśli stopień pętli σ jest równy 0, tj. jeśli $\sigma'(1) = 0$ (przy warunku początkowym $\sigma'(0) = 0$), to $\sigma \simeq *$.

Wynika to z jednospójności prostej (wynikającej z jej ściągłości; por. wykład 8, s. 170). Homotopia F' , która deformuje pętlę σ' na prostej E do punktu 0, wyznacza homotopię $F = p \circ F'$, która deformuje pętlę σ do punktu $*$.

Wnioskujemy więc, że

Twierdzenie. $\pi_1(S^1) = Z$.

* * *

Posługując się własnościami grupy podstawowej, podamy teraz inny dowód twierdzenia o nieistnieniu retrakcji krążka płaskiego na brzeg.

Dla dowodu, niech $r : Q \rightarrow S$ będzie retrakcją krążka W na jego brzeg S . Złożenie $S \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{r} S$, gdzie i jest inkluzją $S \subset Q$, tj. odwzorowaniem danym wzorem $i(x) = x$ dla $x \in S$, jest tożsamością $1_S : S \rightarrow S$.

Mamy więc $r \circ i = 1_S$, skąd $(r \circ i)_* = 1_{\pi_1(S)}$. Po uwzględnieniu własności (7) i (8), z wykładu 8, dostajemy

$$(9) \quad r_* \circ i_* = 1_{\pi_1(S)}.$$

Jest to jednak niemożliwe, bo $\pi_1(Q) = 0$, skąd i_* jest homomorfizmem zerowym i skąd w rezultacie lewa strona wzoru (9) daje zero przy każdym podstawieniu elementu z $\pi_1(S)$, podczas gdy prawa strona nie jest zerowa, bo grupa $\pi_1(S)$ jest izomorficzna z grupą Z , która jest niezerowa.

Ten sposób dowodu nie prowadzi do rezultatu w wymiarach wyższych, bo $\pi_1(S^n) = 0$, jeśli $n \geq 2$. Dowód nieistnienia retrakcji Q^{n+1} na S^n można wszakże przeprowadzić podobnie, jeśli posłużyć się grupami homotopii wyższych rzędów (np. P. J. Hilton, *Introduction to homotopy theory*). Można się posłużyć również grupami homologii (por. np. S. Eilenberg i N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*). W obu teoriach n -te grupy sfer n -wymiarowych są niezerowe, a grupy kul zerowe, a odwzorowania wyznaczają homomorfizmy grup stosujące się do wspomnianych tu reguł (7) i (8).

Metoda znajduje ogólny opis w teorii kategorii.

* * *

Zasadnicze twierdzenie algebry orzeka, że jeśli

$$W(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

jest wielomianem zmiennej zespolonej o współczynnikach zespolonych nie redukującym się do stałej, tj. nie będącym postaci $W(z) = a_0$, to istnieje liczba zespolona z_* taka, że $W(z_*) = 0$.

Dowód. Przyjmijmy, że w podanym tu zapisie dla $W(z)$ współczynnik a_n jest różny od zera. Przypuśćmy, że jest stałe $W(z) \neq 0$. Wyrażenie $W(z)/|W(z)|$ jest więc określone dla każdego z i wartości tego wyrażenia leżą na okręgu jednostkowym. Jeśli przyjmiemy, że $z = re^{2\pi i x}$, $0 \leq x < 1$ i $r \geq 0$, to wyrażenie $W(z)/|W(z)|$ można traktować jako funkcję

$$H(x, r) = W(re^{2\pi i x})/|W(re^{2\pi i x})|$$

zmiennych x i r , a tym samym jako homotopię zapoczątkowaną dla $r = 0$ odwzorowaniem stałym $H(x, 0) = W(0)/|W(0)|$ i łączącą to odwzorowanie z odwzorowaniami $H(x, r)$, $0 \leq x \leq 1$.

Odwzorowania te są pętlami, bo dla $x = 0$ i $x = 1$ wartości wyrażenia $e^{2\pi i x}$ są te same.

Pętle te są zaczepione wszakże w rozmaitych punktach okręgu, mianowicie w punktach $W(r)/|W(r)|$. Homotopia

$$G(x, r) = |W(r)|W(re^{2\pi i x})/|W(r)|W(re^{2\pi i x})|$$

nie ma już tej wady. Dla $x = 0$ i $x = 1$ ma tę samą dla każdego r wartość 1. Homotopia G łączy pętlę zerową w 1 z każdą z pętli

$$\tau_r(x) = G(x, r), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Wobec dowiedzonego w tym wykładzie twierdzenia, stopnie pętli τ_r powinny być dla wszystkich r te same⁽¹⁾. Stopień pętli τ_0 , która jest pętlą zerową, jest równy 0. Tymczasem dla dostatecznie dużych r stopień pętli τ_r jest równy n (a więc równy stopniowi wielomianu).

Istotnie, dla dostatecznie dużych r mamy

$$(10) \quad G(x, r) = e^{2\pi i n x} \cdot a(x, r),$$

gdzie $a(x, r)$ jest liczbą zespoloną, której argument jest $< \pi$. Podniesienie $G'(x, r)$ pętli (10) różni się więc mniej niż o 1 od podniesienia $n x$ pętli $p_n(x) = e^{2\pi i n x}$ (zakładając ten sam warunek początkowy 0 dla $x = 0$). Ponieważ stopień — wartość pętli dla $x = 1$ — jest liczbą całkowitą, więc stopnie obu pętli są te same i równe liczbie n , która jest stopniem pętli p_n .

* * *

Nieistnienie retrakcji wstęgi Möbiusa na jej brzeg. Dowód nie będzie przebiegać tak prosto jak w przypadku krążka, ponieważ wstęga Möbiusa — w odróżnieniu od krążka — ma grupę podstawową niezerową. O nietrywialności zapowiedzianego twierdzenia świadczy również istnienie retrakcji na inny okrąg położony na wstędze Möbiusa, a mianowicie na jej linię środkową.

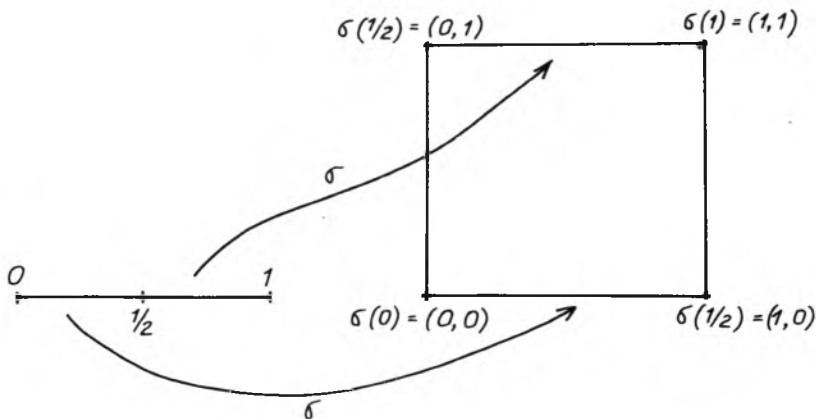
Niech M będzie wstęgą Möbiusa powstałą z prostokąta $P = [0, 1] \times [0, 1]$ przez sklejenie boków $x = 0$ i $x = 1$ tego prostokąta ze zmianą ich orientacji, tj. przez identyfikację punktów $(0, t)$ i $(1, 1-t)$. Brzeg B wstęgi Möbiusa jest przy tym sklejeniu obrazem innej pary boków prostokąta P , a mianowicie boków $y = 0$ i $y = 1$. Rozważmy na B pętlę σ polegającą na włożeniu w P najpierw pierwszej połowy $[0, 1/2]$ odcinka $[0, 1]$ tak, by odcinek $[0, 1/2]$ nakrył jednostajnie bok $y = 0$ prostokąta P , poczynając od punktu $(0, 0)$, otrzymanego jako $\sigma(0)$, kończąc na punkcie $(1, 0)$ otrzymanym jako $\sigma(1/2)$, a potem drugiej połowy $[1/2, 1]$, tak by w podobny sposób nakryła jednostajnie bok $y = 1$ prostokąta P , poczynając od punktu $(0, 1)$ i kończąc na $(1, 1)$. Daje to po sklejeniu P do M pętlę w B , zaczepioną w punkcie powstałym z punktów $(0, 0)$ i $(1, 1)$ prostokąta P .

Niech $j : B \rightarrow M$ będzie inkluzją $B \subset M$.

Niech S będzie linią środkową wstęgi Möbiusa i niech $r : M \rightarrow S$ będzie wspomnianą już retrakcją. Złożenie

$$I \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{j} M \xrightarrow{r} S$$

⁽¹⁾ Mniej formalną argumentację można znaleźć w książce L. S. Pontrjagina, *Algebra*, Moskwa 1987, s. 73.



Rys. 121. Pętla σ

jest pętlą nawijającą odcinek dwukrotnie (bez zmiany kierunku!) na S . Grupa $\pi_1(B)$ jest izomorficzna z grupą Z liczb całkowitych i pętla σ reprezentuje w tej grupie 1. Mamy więc

$$r_*(j_*(1)) = 2.$$

Przypomnijmy (wzór (10), s. 176), że retrakcja r jest homotopijna z tożsamością na M i że wobec tego r_* jest izomorfizmem (por. wykład 8 s. 176, wniosek). Jest więc $j_*(1) = \pm 2$.

Jeśliby teraz istniała retrakcja $s : M \rightarrow B$, to ponieważ złożenie $s \circ j$ byłoby tożsamością, tożsamością byłoby również złożenie

$$\pi_1(B) \xrightarrow{j_*} \pi_1(M) \xrightarrow{s_*} \pi_1(B).$$

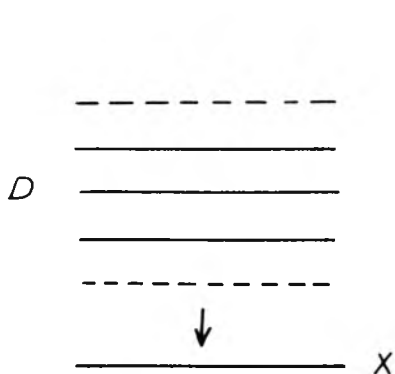
Wynikałoby stąd, że $s_*(\pm 2) = 1$, co dla homomorfizmu $Z \rightarrow Z$ jest niemożliwe (grupa $\pi_1(M)$ jest izomorficzna z Z ; wynika to z przypominanego faktu, że $r_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(S)$ jest izomorfizmem).

Z nieistnienia retrakcji wstęgi Möbiusa na jej brzeg można wnioskować o jej niesplaszczalności (dowodiliśmy tego w inny sposób, korzystając z twierdzenia o zachowaniu otwartości, w wykładzie 3, s. 94).

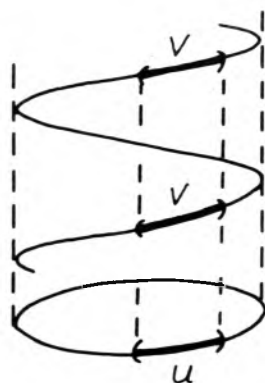
Dowód. Jeśliby wstęga Möbiusa M była podzbiorem płaszczyzny, to jej brzeg B — homeomorficzny z okręgiem — rozciąłby płaszczyznę na dwa obszary. Reszta wstęgi — jako zbiór spójny — leżałaby w jednym z tych obszarów i musiałaby ten obszar wypełniać całkowicie, bo inaczej można by ją zretrahować na B . Ta konkluzja wymaga powołania się na twierdzenie Schoenfliesa, wobec którego rozważany obszar wraz z brzegiem B może być uważany za wnętrze koła z tymże brzegiem, oraz powołanie się na dowiedzione twierdzenie o niemożliwości wspomnianej retrakcji. Wypełniając ten obszar, wstęga Möbiusa okazałaby się homeomorficzna z krążkiem płaskim, to zaś jest niemożliwe z uwagi na nietrywialność grupy $\pi_1(M)$.

WYKŁAD 10. Nakrycia — ogólnie • Twierdzenie o podnoszeniu dróg • Twierdzenie o podnoszeniu homotopii • O podnoszeniu odwzorowań: pewne kryterium • Nieistotność odwzorowań $S^n \rightarrow S^1$ dla $n \geq 2$ • Przykład nakrycia: torus i płaszczyzna • Przykład przestrzeni o grupie podstawowej nieabelowej

Odwzorowanie $p: E \rightarrow X$ przestrzeni topologicznych jest nazywane *odwzorowaniem nakrywającym* lub krócej *nakryciem*, jeśli każdy punkt przestrzeni X ma otoczenie otwarte U takie, że $p^{-1}(U)$ jest sumą rozłącznych ze sobą podzbiorów otwartych V przestrzeni E takich, że odwzorowania częściowe $p|_V$ są homeomorfizmami na zbiór U ; warunek ten implikuje domkniętość zbiorów V w $p^{-1}(U)$. O zbiorze (otwartym) U mającym te własności mówi się, że jest *nakryty w sposób prosty*.



Rys. 122. Rzutowanie $X \times D \rightarrow X$



Rys. 123. Linia śrubowa reprezentująca nakrycie okręgu przez prostą

Nakrycia są — co łatwo widać z ich określenia — *odwzorowaniami ciągłymi i otwartymi*.

Homeomorfizmy są nakryciami — co jest oczywiste. Innymi oczywistymi przykładami są rzutowania $X \times D$ na X z produktu przestrzeni X przez przestrzeń dyskretną; niezależnie od punktu cała przestrzeń X może być tu wzięta za zbiór U .

Rozpatrywane poprzednio odwzorowanie $p: E \rightarrow S^1$ prostej na okrąg, dane wzorem $p(t) = e^{2\pi it}$, $t \in E$, jest nakryciem. Nakryciami są nawinięcia n -krotne okręgu $|z| = 1$ na siebie dane dla n całkowitych wzorami

$$p_n(z) = z^n.$$

Ilość zbiorów V nakrywających zbiór U — *krotność nakrycia* — może być zarówno skończona, jak i nieskończona, ale jeśli jest nieprzeliczalna, przestrzeń E nie może być metryzowalna i ten przypadek nie będzie nas interesował.

Założmy, że rozważane przestrzenie są T_2 .

* * *

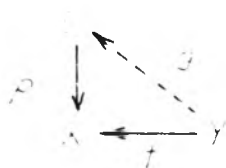
Niech $p: E \rightarrow X$ będzie ustalonym nakryciem.

Niech $f: Y \rightarrow X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Odwzorowanie $g: Y \rightarrow E$ takie, że

$$(1) \quad p \circ g = f$$

nazwiemy *podniesieniem* odwzorowania f .

Równość (1) ilustruje diagram



Powstaje pytanie o istnienie podniesienia dla danego z góry odwzorowania f . Powstaje również pytanie o jedność podniesienia, jeśli założyć, że ma ono spełniać dany z góry warunek początkowy

$$(2) \quad g(y_0) = e_0.$$

Wobec (1) wartość e_0 musi być taka, że $p(e_0) = f(y_0)$.

Twierdzenie o jedności podniesienia. *Jeśli Y jest przestrzenią spójną, a g i h są podniesieniami odwzorowania f takimi, że*

$$188 \quad (3) \quad g(y_0) = h(y_0)$$

dla pewnego punktu y_0 przestrzeni Y , to

$$g = h.$$

Dowód. Zbiór $\{y : g(y) = h(y)\}$ jest wobec tego, że przestrzeń wartości odwzorowań jest klasy T_2 , podzbiorem domkniętym przestrzeni Y . Zbiór ten jest niepusty wobec (3). Dowód, wobec założonej spójności przestrzeni Y , będzie zakończony, jeśli wykazemy, że ten zbiór jest otwarty.

Rozważmy w tym celu punkt y przestrzeni Y taki, że $g(y) = h(y)$. Niech U będzie otoczeniem otwartym punktu $f(y)$ w X takim, że $f^{-1}(U)$ rozpada się na zbiory otwarte V nakrywające U w sposób prosty. Weźmy to spośród V , do którego należy wspólna wartość $g(y) = h(y)$ odwzorowań g i h . Wobec ciągłości istnieje otoczenie W punktu y takie, że $g(W) \subset V$ i $h(W) \subset V$.

Pokażemy, że odwzorowania g i h są równe na W , co zakończy dowód.

Niech $y \in W$. Wartości $g(y)$ i $h(y)$ należą do wspomnianego wyżej V . Ale $p|V$ jest homeomorfizmem na zbiór U , więc jeśli $g(y) \neq h(y)$, to byłoby $p(g(y)) \neq p(h(y))$, wbrew założonemu $p \circ g = p \circ h$.

Twierdzenie o podnoszeniu dróg. Jeśli $\sigma : [0,1] \rightarrow X$ jest drogą i e_0 jest punktem przestrzeni E takim, że $p(e_0) = \sigma(0)$, to istnieje droga $\sigma' : [0,1] \rightarrow E$ taka, że

$$(4) \quad p \circ \sigma' = \sigma,$$

$$(5) \quad \sigma'(0) = e_0.$$

Na mocy poprzedniego twierdzenia istnieje tylko jedna droga σ' spełniająca (4) i (5), tj. będąca podniesieniem dla σ i spełniająca dany z góry (dopuszczalny) warunek początkowy.

Dowód. Dla każdego s z odcinka $[0,1]$ weźmy pod uwagę otoczenie U punktu $p(s)$ w X takie, że $p^{-1}(U)$ rozpada się na podzbiory otwarte V przestrzeni E nakrywające U w sposób prosty (tj. na takie zbiory V , że $p|V$ są homeomorfizmami V na U) oraz otoczenie otwarte W punktu s na $[0,1]$ takie, że $\sigma(W) \subset U$, istniejące na mocy ciągłości odwzorowania σ .

Niech

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = 1$$

będzie podziałem odcinka $[0,1]$ takim, że odcinki $[a_i, a_{i+1}]$ nie przekraczają liczby dodatniej δ będącej liczbą Lebesgue'a dla pokrycia odcinka $[0,1]$ przedziałami W .

Odcinek $[a_0, a_1]$ jest odwzorowany przez σ w zbiór otwarty U , którego przeciwobraz $p^{-1}(U)$ rozpada się na zbiory otwarte nakrywające U

w sposób prosty. Niech V będzie tym spośród nich, do którego należy punkt e_0 . Dla s z odcinka $[a_0, a_1]$ przyjmujemy

$$\sigma'(s) = (p|V)^{-1}(\sigma(s)),$$

czyniąc w ten sposób między innymi zadość warunkowi $\sigma'(0) = e_0$.

Aby przedłużyć dotąd określone odwzorowanie σ' na $[a_1, a_2]$, bierzemy pod uwagę zbiór otwarty U , którego przeciwobraz $p^{-1}(U)$ rozpada się na zbiory otwarte V nakrywające U w sposób prosty i które jest otoczeniem punktu $\sigma(a_1)$. Weźmy pod uwagę to V , do którego należy $\sigma'(a_1)$. Dla s z odcinka $[a_1, a_2]$ przyjmujemy

$$\sigma'(s) = (p|V)^{-1}(\sigma(s)),$$

co między innymi zapewnia zgodność tego określenia w punkcie a_1 z określeniem odwzorowania na $[a_0, a_1]$ w tym punkcie.

Postępując tak dalej, określimy σ' dla punktów s z odcinka $[a_2, a_3]$ i dalszych, a w końcu na całym odcinku $[a_0, a_n] = [0, 1]$. Warunek $p \circ \sigma' = \sigma$ jest zapewniony przez przeprowadzoną konstrukcję.

Nadal $p: E \rightarrow X$ jest ustalonym nakryciem przestrzeni X .

Twierdzenie o podnoszeniu homotopii. Niech Y będzie przestrzenią lokalnie spójną⁽¹⁾ i niech $H: Y \times [0, 1] \rightarrow X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Niech $F: Y \times \{0\} \rightarrow E$ będzie odwzorowaniem ciągłym takim, że

$$p(F(y, 0)) = H(y, 0), \quad y \in Y.$$

Istnieje odwzorowanie $H': Y \times [0, 1] \rightarrow E$ takie, że

$$(6) \quad p \circ H' = H,$$

$$(7) \quad H'|Y \times \{0\} = F.$$

Dowód. Ustalmy $y, y \in Y$. Dla każdego $t, 0 \leq t \leq 1$, istnieje otoczenie W punktu y i przedział P wokół t taki, że $H(W \times P)$ jest zawarte w otoczeniu U punktu $H(y, t)$ takim, że $p^{-1}(U)$ rozpada się na zbiory otwarte V nakrywające U w sposób prosty. Niech $\delta > 0$ będzie liczbą Lebesgue'a dla pokrycia odcinka $\{y\} \times [0, 1]$ przedziałami W . Niech $W_1 \times P_1, \dots, W_k \times P_k$ będzie pokryciem skończonym odcinka $\{y\} \times [0, 1]$ zbiorami $W \times P$ i niech W_y będzie otoczeniem spójnym punktu y zawartym w $W_1 \cap \dots \cap W_k$.

⁽¹⁾ Jedynie ten przypadek będzie się pojawiał w zastosowaniach twierdzenia, które jest prawdziwe i bez założenia lokalnej spójności o przestrzeni Y , ale dowód tak ogólnego twierdzenia jest dłuższy; np. E. Spanier, *Algebraic Topology*, s. 79 wyd. polskiego z 1972 r., rozdz. 2, § 2.

Odwzorowanie F dane na $W_y \times \{0\}$ przedłużamy teraz do odwzorowania ciągłego $F_y : W_y \times [0,1]$ tak, by $p(F_y(y', t)) = H(y', t)$ dla $y' \in W_y$ i $0 \leq t \leq 1$. W tym celu rozpatrujemy podział

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1} < a_m = 1$$

odcinka $0 \leq t \leq 1$ taki, że długości odcinków $[a_i, a_{i+1}]$ nie przekraczają wspomnianej liczby Lebesgue'a δ . Przedłużamy F z $W_y \times \{0\}$ na $W_y \times [0, a_1]$, biorąc najpierw pod uwagę zbiór otwarty U w X taki, że $H(W_y \times [0, a_1]) \subset U$, którego przeciwobraz $p^{-1}(U)$ rozpada się na zbiory V nakrywające zbiór U w sposób prosty, a potem to V spośród wymienionych, w którym zawarty jest zbiór spójny $F(W_y \times \{0\})$.

Określamy F_y na punktach zbioru $W_y \times [0, a_1]$ wzorem

$$F_y(y', t) = (p|V)^{-1}(H(y', t)).$$

Postępowanie można powtórzyć na $W_y \times [a_1, a_2]$, bo zbiór $F_y(W_y \times \{a_1\})$ jest spójny dla dotąd określonego F_y . Po skończonej ilości kroków odwzorowanie F_y zostaje określone ze spełnieniem wymagających warunków na całym zbiorze $W_y \times [0,1]$.

Odwzorowania F_y określone na podzbiorach otwartych $W_y \times [0,1]$ produktu $Y \times [0,1]$ zgadzają się na częściach wspólnych każdego z dwóch spośród tych zbiorów.

Istotnie, jeśli (y', t) leży w $W_{y_1} \times [0,1]$ i $W_{y_2} \times [0,1]$, to leży na odcinku $\{y'\} \times [0,1]$ zawartym w tym przekroju. W punkcie $(y', 0)$ tego odcinka wartości odwzorowań F_{y_1} i F_{y_2} są równe, będąc równymi wartości odwzorowania F w tym punkcie. Ponieważ każde z nich jest podniesieniem odwzorowania $H|_{\{y'\} \times [0,1]}$, więc są równe w każdym punkcie odcinka $\{y'\} \times [0,1]$ na mocy twierdzenia o jedności podniesienia.

Dowiedziona przesłanka pozwala na połączenie w jedno wszystkich odwzorowań F_y , $y \in Y$, tworząc w ten sposób zapowiedziane odwzorowanie H' .

* * *

Wnioskiem z twierdzenia o podnoszeniu homotopii jest między innymi to, że homomorfizmy wyznaczone przez nakrycia nie przeprowadzają w zero elementów niezerowych⁽²⁾.

D o w ó d. Niech $p : E \rightarrow X$ będzie nakryciem i niech $\varphi : I \rightarrow E$ będzie pętlą w E taką, że $p \circ \varphi \simeq 0$ (punktem zaczepienia pętli $p \circ \varphi$ jest punkt $p(e_0)$, gdzie $e_0 = \varphi(0)$, a równoważność jest rozumiana jako homotopia zachowująca punkt $p(e_0)$). Homotopia ustalająca równoważność $p \circ \varphi \simeq 0$ ma podniesienie do homotopii ustalającej równoważność $\varphi \simeq 0$. Pokazaliśmy w ten sposób, że

⁽²⁾ Homomorfizmy nie przenoszące elementów niezerowych z zera są nazywane *monomorfizmami*.

$$p_*([\varphi]) = 0 \Rightarrow [\varphi] = 0.$$

W przypadku znanego nam nakrycia okręgu przez prostą stwierdzenie jest prawdziwe w sposób trywialny, ponieważ grupa $\pi_1(E)$ jest zerowa.

Następujące kryterium rozszerza zakres odwzorowań mających podniesienie.

Twierdzenie. Niech $p: E \rightarrow X$ będzie nakryciem. Niech Y będzie przestrzenią łukowo spójną i lokalnie spójną. Niech $f: Y \rightarrow X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Niech x_0, y_0 i e_0 w przestrzeniach X, Y i E będą takie, że $f(y_0) = x_0$ i $p(e_0) = x_0$.
Jeśli

$$(8) \quad f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)),$$

to istnieje odwzorowanie ciągle $f': Y \rightarrow E$ takie, że

$$p \circ f' = f$$

i

$$f'(y_0) = e_0.$$

U w a g i p r z e d d o w o d e m. Ponieważ implikacja przeciwna jest oczywista (dowód polega na przeliczeniu), twierdzenie daje charakteryzację odwzorowań mających podniesienie. Istnieje co najwyżej jedno podniesienie (na mocy twierdzenia o jedyności podniesienia). Twierdzenie zawiera w sobie w oczywisty sposób twierdzenie o istnieniu podniesienia drogi i, ogólniej, podniesień odwzorowań z przestrzeni jednospójnych (grupa $\pi_1(Y, y_0)$, jest wtedy zerowa i założenie (8) zostaje w oczywisty sposób spełnione).

D o w ó d. Niech $y \in Y$ i niech (korzystamy z łukowej spójności) $\sigma: I \rightarrow Y$ będzie drogą od y_0 do y . Mamy

$$\sigma(0) = y_0 \quad \text{ i } \quad \sigma(1) = y.$$

Dla drogi $f \circ \sigma$, zaczynającej się w $x_0 = f(\sigma(0))$, rozważmy podniesienie $(f \circ \sigma)'$ spełniające warunek początkowy

$$(f \circ \sigma)'(0) = e_0.$$

Zapowiedziane odwzorowanie $f': Y \rightarrow E$ określamy, przyjmując

$$(9) \quad f'(y) = (f \circ \sigma)'(1) \quad \text{ dla } y \in Y.$$

Zgodność $p \circ f' = f$ jest zapewniona, bo $p(f'(y)) = p((f \circ \sigma)'(1)) =$
192 $= (f \circ \sigma)(1) = f(\sigma(1)) = f(y).$

Pokażemy, że określenie (9) nie zależy od wyboru drogi od y_0 do y .

Weźmy w tym celu jeszcze jedną drogę $\tau : I \rightarrow Y$ taką, że $\tau(0) = y_0$ i $\tau(1) = y$. Pokażemy, że

$$(10) \quad (f \circ \sigma)'(1) = (f \circ \tau)'(1).$$

Drogi $f \circ \sigma$ i $-(f \circ \tau)$ łączą x_0 z $f(y)$ w przeciwnych kierunkach. Ich połączenie

$$\varphi = f \circ \sigma + (-(f \circ \tau))$$

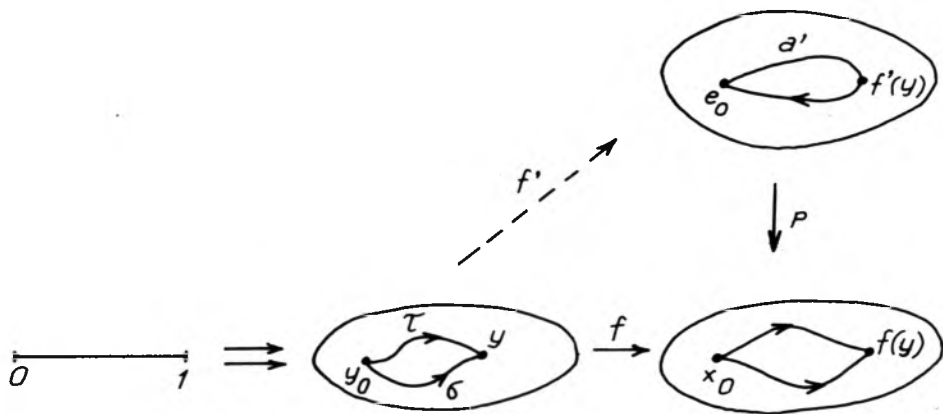
jest więc pętlą w x_0 . Mamy $-f \circ \tau = f \circ (-\tau)$, skąd

$$\varphi = f \circ \sigma + (-(f \circ \tau)) = f \circ (\sigma + (-\tau));$$

w rezultacie $[\varphi] \in f_*(\pi_1(Y, y_0))$. Wobec (8) mamy więc

$$[\varphi] \in p_*(\pi_1(E, e_0)).$$

Istnieje zatem pętla w E zaczepiona w e_0 , która po nałożeniu odwzorowania p daje φ . Jest ona podniesieniem φ' pętli φ ; przypomnijmy, że podniesienie jest tylko jedno, jeśli warunki początkowe są zadane.



Rys. 124. Pętla p'

Ze względu na wspomnianą jedyność podniesienia pętla φ' jest zesztukowaniem podniesienia $(f \circ \sigma)'$ drogi $f \circ \sigma$ — pierwszego składnika we wzorze na φ — kończącego się w $(f \circ \sigma)'(1)$, z zaczynającym się w tym samym $(f \circ \sigma)'(1)$ podniesieniem $-(f \circ \tau)' = -(f \circ \tau)'$ drogi $-(f \circ \tau)$ (równość wynika z jedyności podniesienia), które kończy się w e_0 . Wnioskujemy stąd, że podniesienie $(f \circ \tau)'$ drogi $f \circ \tau$, jeśli zacznie się w e_0 , będzie się kończyć w $(f \circ \sigma)'(1)$. Będzie więc (10).

Pozostaje dowieść ciągłości określonego poprawnie odwzorowania f' .

Dla dowodu, niech $y \in Y$ i niech W będzie otoczeniem punktu $f'(y)$. Nakrycia są odwzorowaniami otwartymi, więc obraz $p(W)$ jest otoczeniem punktu $p(f'(y)) = f(y)$. Niech U będzie — zawartym w $p(W)$ — otoczeniem otwartym punktu $f(y)$, nakrytym w sposób prosty przez p . Niech V będzie otoczeniem spójnym punktu y takim, że $f'(V) \subset U$ (ciągłość f i lokalna spójność Y).

Jest $f'(y) \in W \cap p^{-1}(U)$. Korzystając więc z tego, że zbiory $f'(V)$ i $p^{-1}(U)$ się przecinają, wnioskujemy, że $f'(V)$ — wobec spójności — zawiera się w jednym ze składników H zbioru $p^{-1}(U)$ takim, że $p|_H$ jest homeomorfizmem H na U . Ponieważ, wobec $W \cap f'(V) \neq \emptyset$ i $U \subset p(W)$, zbiór W zawiera ten składnik, więc jest $f'(V) \subset W$. To kończy dowód ciągłości f' .

Odnotujmy następujący wniosek z dowiedzonego twierdzenia:

Odwzorowania $S^n \rightarrow S^1$, $n \geq 2$, są nieistotne.

D o w ó d . Niech $f: S^n \rightarrow S^1$, $n \geq 2$, będzie odwzorowaniem ciągłym. Ponieważ $\pi_1(S^n) = 0$, więc $f_*(\pi_1(S^n)) = 0$.

Założenia poprzedniego twierdzenia są więc spełnione dla każdego nakrycia, w szczególności dla nakrycia $p: E \rightarrow S^1$ okręgu przez prostą.

Przyjmujemy, że x_0 jest punktem sfery S^n takim, że $f(x_0) = 1$ (liczba zespolona 1 na okręgu).

Stosując twierdzenie, dostajemy odwzorowanie $f': S^n \rightarrow E$ takie, że $f'(x_0) = 0$ i $p \circ f' = f$.

Istnieje homotopia $H: E \times I \rightarrow E$ taka, że $H(s, 1) = s$, $H(s, 0) = 0$ i $H(0, t) = 0$ (łączy odwzorowanie stałe, w 0, z tożsamością, zachowując punkt 0), dla wszelkich s i t , $s \in E$, $0 \leq t \leq 1$. Wzór $G(x, t) = p(H(f'(x), t))$, dla $x \in S^n$ i $0 \leq t \leq 1$, określa homotopię $G: S^n \times I \rightarrow S^1$ łączącą f z odwzorowaniem stałym odwzorowującym S^n w punkt 1.

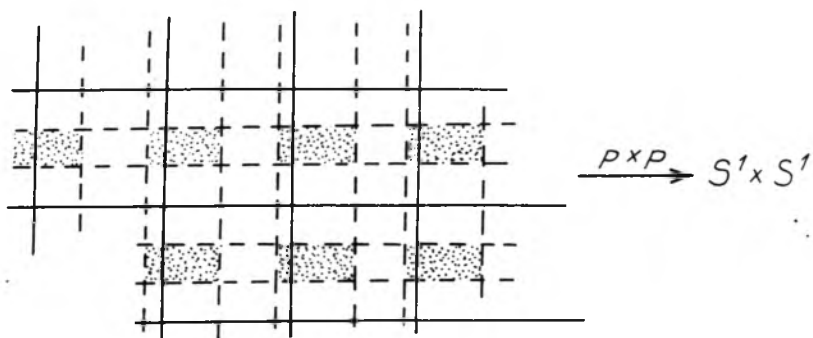
* * *

Płaszczyzna i torus. Torus jest powierzchnią będącą produktem okręgu przez siebie. Użyty był termin *powierzchnia* z uwagi na to, że każdy punkt określonego w ten sposób torusa ma otoczenie homeomorficzne z produktem dwu łuków okręgu, a więc homeomorficzne z prostokątem otwartym. Położenia punktów — lokalnie — są więc z punktu widzenia topologii takie same, jak położenia punktów na płaszczyźnie⁽³⁾, która stanowi najprostszą spośród powierzchni.

⁽³⁾ Torus jest lokalnie izometryczny z płaszczyzną: dostatecznie mały zbiór otwarty na powierzchni torusa daje się rozprostować na płaszczyźnie bez zmiany odległości liczonych wzdłuż najkrótszych łuków łączących punkty. Powierzchnia kuli nie ma tej własności.

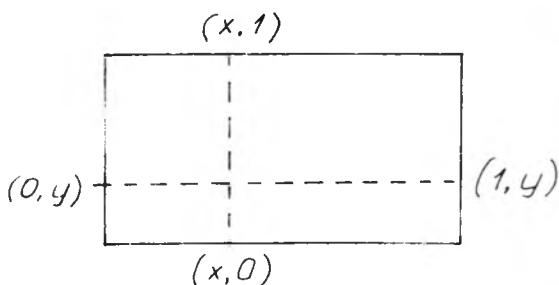
Przyjmijmy, że rozważanym okręgiem jest okrąg $|z| = 1$ na płaszczyźnie liczb zespolonych. Mając znane nam odwzorowanie nakrywające p prostej E na ten okrąg — oznaczany dalej jak zwykle przez S^1 — weźmy pod uwagę odwzorowanie $p \times p: E \times E \rightarrow S^1 \times S^1$ ⁽⁴⁾. To odwzorowanie — płaszczyzny na torus — jest odwzorowaniem nakrywającym.

Dla dowodu, niech (a, b) będzie punktem na torusie. Przeciwobraz tego punktu przez odwzorowanie $p \times p$ składa się z punktów (x, y) płaszczyzny takich, że $e^{2\pi i x} = a$ i $e^{2\pi i y} = b$. Punkty te tworzą na płaszczyźnie zbiór mający postać kraty jednostkowej: punkty (x, y) i (x', y') należą do przeciwobrazu tego samego punktu wtedy i tylko wtedy, gdy różnice $x - x'$ i $y - y'$ są liczbami całkowitymi.

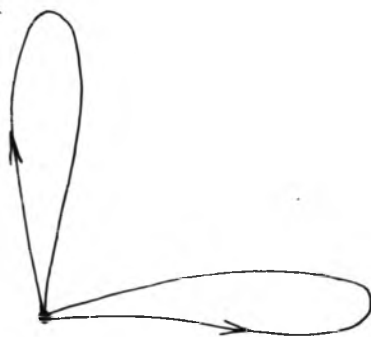


Rys. 125. Nakrycie torusa płaszczyzną

Jeśli U jest przedziałem wokół a , V zaś jest przedziałem wokół b , to przeciwobraz $(p \times p)^{-1}(U \times V)$ stanowi sumę rozłącznych ze sobą prostokątów otwartych, produktów składowych przeciwobrazów $p^{-1}(U)$ i $p^{-1}(V)$. Każdy z tych prostokątów przechodzi przez odwzorowanie $p \times p$ homeomorficznie na $U \times V$.



Rys. 126. Torus jako wynik sklejanía boków prostokąta



Rys. 127. Dwie pętle na torusie

⁽⁴⁾ Jeśli p i q są odwzorowaniami, to przez $p \times q$ rozumie się odwzorowanie dane wzorem $(p \times q)(x, y) = (p(x), q(y))$.

Powierzchnię torusa dostaje się jako obraz jednego kwadratu jednostkowego oślaszczyzny, na przykład kwadratu $[0,1] \times [0,1]$; przy odwzorowaniu $p \times p$ w jeden punkt przechodzą przeciwległe punkty boków kwadratu, tj. punkty $(x, 0)$ i $(x, 1)$, a także punkty $(0, y)$ i $(1, y)$. W rezultacie cztery punkty — $(0,0)$, $(0, 1)$, $(1,0)$ i $(1,1)$ — przechodzą w jeden punkt torusa — punkt $(1, 1)$, gdzie 1 rozumie się jako liczbę zespoloną 1 na okręgu zespolonym.

Dlatego wyobrażamy sobie torus jako rezultat sklejenia boków kwadratu, przy którym ulegają sklejeniu leżące naprzeciw siebie punkty tych boków.

Odcinki $y = 0$ i $x = 0$ tego kwadratu po sklejeniu stają się na torusie okręgami. Wyobraża je rys. 127.

Niech $T = S^1 \times S^1$ będzie torusem. Wyróżnimy punkt $*$ na T , powstały z punktu $(0, 0)$ kwadratu przy opisanym sklejeniu.

W celu znalezienia grupy podstawowej $\pi_1(T, *)$ niech $\sigma: I \rightarrow T$ będzie pętlą w punkcie $*$ i niech $\sigma': I \rightarrow E \times E$ będzie podniesieniem tej pętli takim, że $\sigma'(0) = (0, 0)$.

Ponieważ punkt $\sigma'(1)$ rzutuje się za pomocą $p \times p$ na punkt $*$, więc $\sigma'(1) = (m, n)$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi.

Jeśli τ jest pętlą w punkcie $*$ równoważną z σ , to dla jej podniesienia τ' jest $\tau'(1) = \sigma'(1)$ na mocy twierdzenia o podnoszeniu homotopii.

Grupa $\pi_1(T, *)$ ma więc odwzorowanie w zbiór $Z \times Z$ złożony z par liczb całkowitych. Zbiór $Z \times Z$ z dodawaniem „współrzędna po współrzędnej” i elementem neutralnym $(0, 0)$ jest grupą. Pokażemy, że znalezione przez nas odwzorowanie jest izomorfizmem.

Odwzorowanie $\pi_1(T, *) \rightarrow Z \times Z$ jest homomorfizmem.

Jeśli bowiem do pętli σ w $*$ dosztukujemy zaczepioną w punkcie $*$ pętlę τ , to $(\sigma + \tau)'$ — podniesienie pętli $\sigma + \tau$, zaczynające się w $(0, 0)$ — składa się z drogi σ' i dosztukowanej do niej, w jej punkcie końcowym $\sigma'(1)$, drogi τ'' będącej przesunięciem podniesienia τ' spełniającego warunek $\tau'(0) = (0, 0)$ o wektor (m, n) , gdzie $(m, n) = \sigma'(1)$. Jeśli $\tau'(1) = (k, l)$, to końcem drogi $(\sigma + \tau)'$ będzie punkt $(m + k, n + l)$. Stwierdziliśmy w ten sposób homomorficzność odwzorowania. Dla kompletności dowodu dodajmy, że przesunięcie τ'' drogi τ' o wektor (m, n) jest jedynym podniesieniem drogi τ spełniającym warunek początkowy $\tau'(0) = (m, n)$, co wynika z jedności podniesienia. To, że przesunięcie $\tau'(s) + (m, n)$ jest rzeczywiście podniesieniem i że spełnia warunek początkowy, sprawdza się rachunkiem.

Odwzorowanie $\pi_1(T, *) \rightarrow Z \times Z$ jest izomorfizmem.

Dla dowodu, że jest jednokrotne, weźmy pętlę σ w punkcie $*$ taką, że $\sigma'(1) = (0, 0)$ (tj. element grupy przechodzący w zero grupy $Z \times Z$). Wykażemy — co wystarczy — że $\sigma \simeq *$ (czyli że wspomniany element grupy jest zerowy). Równość $\sigma'(1) = (0, 0)$ znaczy, że σ' jest pętlą w $E \times E$ zaczepioną w $(0, 0)$. Płaszczyzna $E \times E$ jest — jak wiemy — jednospójna. Mamy zatem $\sigma' \simeq (0, 0)$. Odwzorowanie $p \times p: E \times E \rightarrow T$ nałożone na homotopię realizującą wspomnianą wyżej równoważność daje homotopię realizującą równoważność

Łatwo widzieć, że każda para (m, n) jest wartością rozważanego odwzorowania.

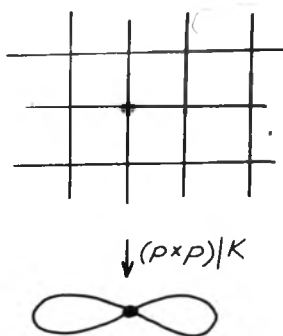
Dowiedliśmy więc, że $\pi_1(T) = Z \times Z$.

U w a g a. Jest ogólne twierdzenie — którego nie dowodzimy — głoszące, że $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ ⁽⁵⁾.

Niech M będzie podzbiorem torusa Z złożonym z punktów wspomnianych dwu pętli będących tworzącymi grupy $\pi_1(T)$. Zbiór M jest figurą w kształcie ósemki i jest obrazem przez odwzorowanie $p \times p$ kraty jednowymiarowej K złożonej z prostych

$$x = m \quad \text{ i } \quad y = n,$$

gdzie m i n przebiegają liczby całkowite.



Rys. 128. Nakrycie figury w kształcie ósemki

Odwzorowanie $(p \times p)|K$ jest odwzorowaniem nakrywającym K na M .

Będziemy rozważać pętle w M zaczepione w punkcie $*$ $= (p \times p)(0, 0)$. Oznaczmy przez a pętlę zaczepioną w punkcie $*$, będącą złożeniem $(p \times p) \circ \alpha$, gdzie α jest odwzorowaniem odcinka $[0, 1]$ na odcinek $[(0, 0), (0, 1)]$ kraty K osi y -ów dane wzorem $\alpha(t) = (0, t)$, $0 \leq t \leq 1$. Niech b będzie pętlą w M reprezentowaną przez drugą gałąź ósemki, daną jako odwzorowanie $(p \times p) \circ \beta$, gdzie β jest analogiczną do α parametryzacją odcinka $[(0, 1), (1, 1)]$ kraty K .

Rozważmy w K pętlę $OABCO$, zaczepioną w O , z naturalną parametryzacją (por. rys. 128), gdzie $O = (0, 0)$, $A = (0, 1)$, $B = (1, 1)$ i $C = (1, 0)$.

Pętla $OABCO$ jest niezerowa.

Oczywiście, pętla $OABCO$ jest niezerowa jako pętla na figurze $OABCO$ homeomorficznej z okręgiem (reprezentuje ona 1 w grupie $\pi_1(S^1)$). Nas interesuje jednak niezerowość tej pętli jako pętli w K .

⁽⁵⁾ Wskazówka. Pętli $\sigma: I \rightarrow X \times Y$ przyporządkowuje się parę pętli $I \xrightarrow{\sigma} X \times Y \rightarrow X$ i $I \xrightarrow{\sigma} X \times Y \rightarrow Y$.

Dla dowodu zauważmy najpierw, że krata K ma retrakcję na figurę $OABCO$. Niech r będzie jedną z tych retrakcji.

Przypuśćmy *a contrario*, że H jest homotopią ustalającą w K równoważność pętli $OABCO$ i pętli zerowej $(0, 0)$. Dostajemy odwzorowanie $G: I \times I \rightarrow OABCO$ dane wzorem

$$G(s, t) = r(H(s, t)), \quad s \in I, t \in I.$$

Mamy

$$G(0, t) = G(1, t) = (0, 0),$$

bo

$$H(0, t) = H(1, t) = (0, 0), \text{ a } r(0, 0) = (0, 0),$$

oraz

$$G(s, 0) = r(H(s, 0)) = r(\varphi(s)),$$

gdzie φ jest parametryzacją pętli $OABCO$, oraz

$$G(s, 1) = r(H(s, 1)) = r(0, 0) = (0, 0).$$

Odwzorowanie G jest więc homotopią łączącą w figurze $OABCO$ pętlę $OABCO$ z pętlą zerową $(0, 0)$, co jest niemożliwe.

Niezerowość pętli $OABCO$ w K ma ważne następstwo. Jeśli φ jest jej parametryzacją, to $(p \times p) \circ \varphi$ jest tym samym, co pętla $b + a + (-b) + (-a)$ w M zaczepiona w punkcie $\ast = (p \times p)(0, 0)$. Ponieważ $((p \times p)|K)_{\ast}$ jest monomorfizmem (twierdzenie ze s. 191), z niezerowości φ wynika niezerowość obrazu pętli $OABCO$, tzn. nierówność

$$a + b + (-a) + (-b) \neq 0,$$

a więc nierówność

$$a + b + -(b + a) \neq 0,$$

czyli nierówność

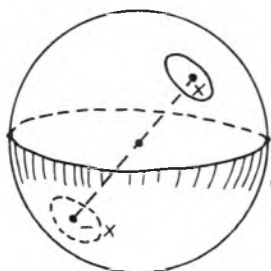
$$a + b \neq b + a.$$

Pokazaliśmy w ten sposób, że grupa $\pi_1(M, \ast)$ jest nieprzemienna⁽⁶⁾.

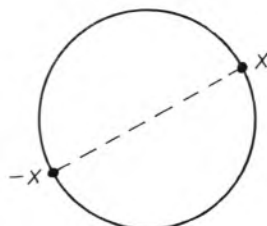
⁽⁶⁾ Nieprzemienne są grupy dopełnień do E^3 okręgów, jeśli te okręgi mają położenia nierównoważne ze zwykłym, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 0$; Dehn (1910).

WYKŁAD 11. Powierzchnia rzutowa • Sfera jako jej nakrycie • Grupa podstawowa powierzchni rzutowej • Odwzorowania zachowujące antypodyzm • Twierdzenie Borsuka-Ulama • Twierdzenie Lusternika-Sznirelmana • Twierdzenie o kanapce

Jeśli na sferze S^2 zostaną zidentyfikowane pary $\{x, -x\}$ punktów antypodycznych, to powstanie przestrzeń nazywana *powierzchnią rzutową*. Jest to przestrzeń zwarta z bazą przeliczalną, a więc metryzowalna, co wynika z ogólnych twierdzeń topologii mnogościowej. Dlatego jest nazywana powierzchnią, że podobnie jak punkty na sferze, każdy jej punkt ma otoczenie homeomorficzne z krążkiem bez brzegu, będące obrazem przez odwzorowanie ilorazowe odpowiednich dwóch krążków na sferze (patrz rys. 129). Ponieważ punkty powierzchni rzutowej mają swoich reprezentantów na każdej z półsfery, które są homeomorficzne z krążkami, więc na powierzchnię rzutową można patrzeć jak na przestrzeń powstałą z krążka przez identyfikację par punktów antypodycznych leżących na jego brzegu (rys. 130).



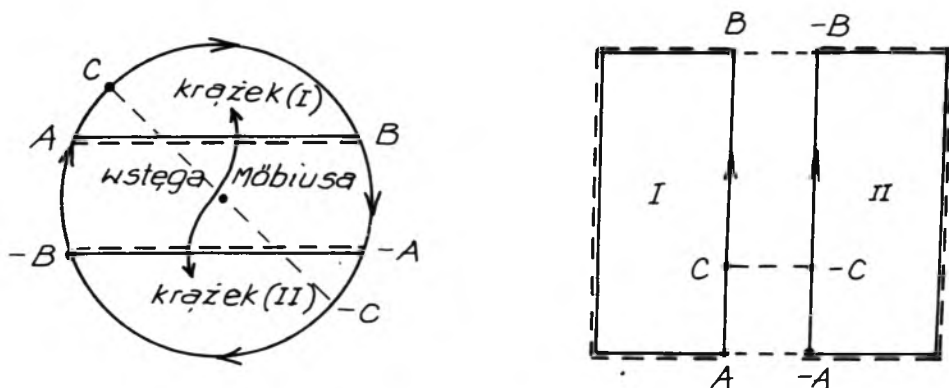
Rys. 129. Powierzchnia rzutowa jako wynik sklejania na sferze punktów antypodycznych



Rys. 130. Sklejanie punktów antypodycznych brzegu krążka

Jedną z osobliwości powierzchni rzutowej jest zawieranie się w niej wstęgi Möbiusa.

Aby to zobaczyć, rozważmy na krążku, z którego powstaje powierzchnia rzutowa, pas wokół średnicy oparty na dwu łukach przechodzących na siebie przez antypodyzm. Przy sklejaniu się krążka w powierzchnię rzutową ten pas sklejając się, daje wstęgę Möbiusa.



Rys. 131. Powierzchnia rzutowa jako suma sklejonych brzegami wstęgi Möbiusa i krążka

Brzeg pasa — składający się z dwu równoległych cięciw — po sklejeniu staje się okręgiem, który jest brzegiem wstęgi Möbiusa.

Reszta krążka składa się z dwóch jego odcinków, które przy sklejeniu się krążka w powierzchnię rzutową, sklejając się ze sobą, dają krążek (por. rys. 131, po prawej stronie), którego brzeg jest jednocześnie brzegiem wstęgi Möbiusa.

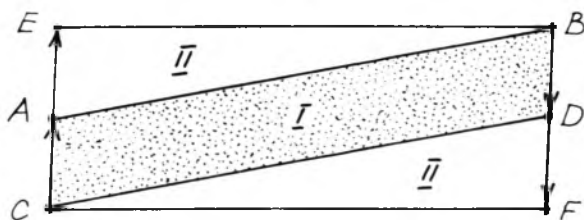
Powierzchnię rzutową zatem można widzieć jako sumę krążka i wstęgi Möbiusa sklejonych ze sobą wspólnym brzegiem. Inaczej: jeśli po wycięciu krążka ze sfery, dokleimy do brzegu powstałego rozcięcia wstęgę Möbiusa wzdłuż jej brzegu, to dostaniemy powierzchnię rzutową.

Osobliwością powierzchni rzutowej jest między innymi to, że zawiera ona krzywą zwykłą zamkniętą, która jej nie rozcina: jest nią okrąg będący linią środkową wstęgi Möbiusa zanurzonej, w opisany wyżej sposób, w powierzchni rzutowej.

Jeśli skleci się dwie wstęgi Möbiusa brzegami, to powstaje powierzchnia nazywana *powierzchnią Kleina*.

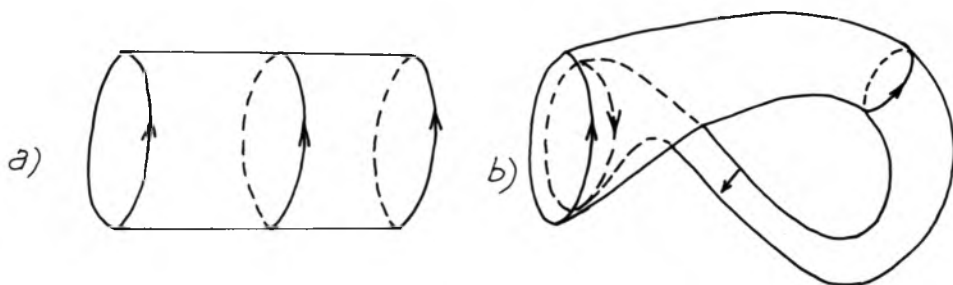
Powierzchnię Kleina najlepiej można sobie wyobrazić jako powstającą z dwu prostokątów (I i II na rys. 132) dających razem powierzchnię walca (patrz rys. 132). Brzegi CAE i BEF powierzchni walca sklejamy następnie ze sobą tak, by C skleściło się z B, a E skleściło się z F.

Dwa prostokąty (I i II na rys. 132) składające się na powierzchnię walca, stają się po tym sklejeniu wstęgami Möbiusa sklejonymi ze sobą swoimi brzegami.



Rys. 132. Prostokąt $CABD$ po sklejeniu CA z BD daje jedną wstęgę Möbiusa. Dwa trójkąty składają się na drugi prostokąt, który po sklejeniu AE z DF daje drugą wstęgę Möbiusa. Wspólnym brzegiem wstęg jest suma odcinków AB i CB tworząca po sklejeniu okrąg

Wizualnie przedstawia to rys. 133.



Rys. 133. Powierzchnia walca (a) i skleciona z niego powierzchnia Kleina (b)

Sklejamy dwa okręgi stanowiące brzegi walca, tak jak się je skleja wtedy, kiedy chce się dostać powierzchnię torusa, ale z tą różnicą, że sklejamy je po ustawieniu ich naprzeciw siebie z przeciwną orientacją (patrz część (b) rysunku), co sprowadzałoby się do czynności fizycznej, jeśli by dopuścić rozcięcie powierzchni w jednym miejscu.

Na mocy samego określenia *sfera jest nakryciem powierzchni rzutowej* odwzorowanie nakrywające stanowi występujące w tym określeniu odwzorowanie ilorazowe. Jest to *nakrycie dwukrotne*.

Oznaczmy przez P^2 powstałą powierzchnię rzutową, a przez $q: S^2 \rightarrow P^2$ odwzorowanie ilorazowe. Wyróżnimy punkt a na powierzchni P^2 oraz punkt b na S^2 taki, że $q(b) = a$.

Niech σ i τ będą pętłami w P^2 zaczepionymi w a i niech σ' i τ' będą ich podniesieniami takimi, że $\sigma'(0) = \tau'(0) = b$. Z twierdzenia o podnoszeniu homotopii wynika, że jeśli $\sigma \simeq \tau$, to $\sigma'(1) = \tau'(1)$ (wzór (7) na s. 181); wspólna wartość dróg σ' i τ' w 1 jest przy tym b lub $-b$.

Ta uwaga pozwala na określenie odwzorowania h grupy $\pi_1(P^2, a)$ w zbiór dwuelementowy $\{0, 1\}$ według następującej umowy: jeśli $\alpha \in \pi_1(P^2, a)$ i α jest reprezentowane przez pętlę σ , to przyjmujemy

$$(1) \quad h(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } \sigma'(1) = b, \\ 1, & \text{jeśli } \sigma'(1) = -b. \end{cases}$$

Odwzorowanie h przyjmuje obie wartości 0 i 1.

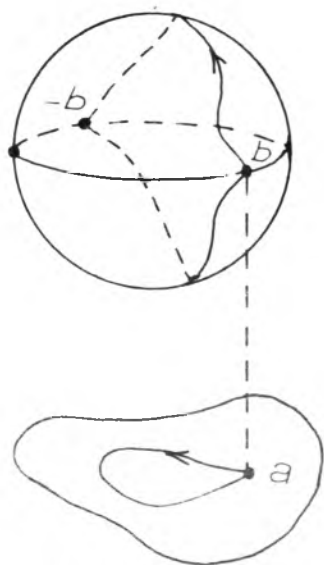
Wartość 0 przyjmuje na elemencie $\alpha = 0$ (jeśli bowiem zaprezentujemy 0 w $\pi_1(P^2, a)$ przez pętlę zerową w a , to jej podniesienie σ' jest pętlą zerową w b i $\sigma'(1) = b$). Wartość 1 przyjmuje na elemencie α reprezentowanym przez pętlę $q \circ \sigma'$, gdzie σ' jest drogą w S^2 o początku w b i końcu $\sigma'(1)$ pokrywającym się z punktem $-b$.

Odwzorowanie h jest różnowartościowe.

Niech bowiem α i β będą elementami grupy $\pi_1(P^2, a)$ takimi, że $h(\alpha) = h(\beta)$. Niech $\alpha = [\sigma]$ i $\beta = [\tau]$. Jest $\sigma'(0) = \tau'(0)$ dla podniesień σ' i τ' pętli σ i τ . Ponieważ $h(\alpha) = h(\beta)$, więc jest także $\sigma'(1) = \tau'(1)$. Sfera S^2 jest jednopójna, więc istnieje homotopia H' łącząca drogi σ' i τ' , zachowująca końce dróg (twierdzenie z wykładu 8 na s. 172). Założenie $q \circ H'$ jest homotopią realizującą równoważność $\sigma \simeq \tau$. Dostajemy więc $\alpha = \beta$.

Traktujemy zbiór $\{0, 1\}$ jako grupę Z_2 , nadając symbolom 0 i 1 charakter liczb całkowitych dodawanych jak reszty mod 2.

Twierdzenie⁽¹⁾. Odwzorowanie $h: \pi_1(P^2, a) \rightarrow Z_2$ określone wzorami (1) jest izomorfizmem.



Rys. 134. $\pi_1(P^2) = Z_2$

Dowód. Niech σ i τ będą pętlami w P^2 zaczepionymi w a . Niech $\alpha = [\sigma]$ i $\beta = [\tau]$. Niech σ' i τ' będą ich podniesieniami zaczynającymi się w b .

Jeśli $\sigma'(1) = b$, to podniesienie $(\sigma + \tau)'$ pętli $\sigma + \tau$ jest zesztukowaniem $\sigma' + \tau'$ dróg σ' i τ' . Stąd $(\sigma + \tau)'(1) = \tau'(1)$, co dowodzi wzoru $h(\alpha + \beta) = h(\alpha) + h(\beta)$ w przypadku $h(\alpha) = 0$.

Jeśli $h(\alpha) = 1$, a więc jeśli $\sigma'(1) = -b$, to podniesieniem pętli $\sigma + \tau$ jest zesztukowanie $\sigma' + \bar{\tau}'$ dróg σ i $\bar{\tau}'$, gdzie $\bar{\tau}'$ jest odbiciem antypodycznym drogi τ' ; droga $\bar{\tau}'$ jest podniesieniem pętli τ spełniającym warunek początkowy $\bar{\tau}'(0) = -b$. Jest więc $(\sigma + \tau)'(1)$ równe $-b$, jeśli $\tau'(1) = b$, i jest równe b , jeśli $\tau'(1) = -b$, co tłumaczy się na $h(\alpha + \beta) = 1$, jeśli $h(\beta) = 0$, i $h(\alpha + \beta) = 0$, jeśli $h(\beta) = 1$, i co dowodzi wzoru $h(\alpha + \beta) = h(\alpha) + h(\beta)$ w rozważanym przypadku.

⁽¹⁾ Obliczenia grupy podstawowej powierzchni rzutowej można dokonać, posługując się twierdzeniem Seiferta-van Kampena, wykorzystując sposób, w jaki ta powierzchnia powstaje z prostszych przez łączenie w tzw. sumę spójną; patrz np. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press, 1980, rozdz. 23.

Twierdzenie. Nie istnieje odwzorowanie ciągłe sfery S^2 w okrąg S^1 zachowujące antypodyzm.

D o w ó d. Załóżmy, *a contrario*, że $f: S^2 \rightarrow S^1$ jest odwzorowaniem ciągłym zachowującym antypodyzm, tj. takim, że $f(-x) = -f(x)$ dla $x \in S^2$. Wyznacza ono odwzorowanie ciągłe $g: P^2 \rightarrow S^1$ określone dla $y \in P^2$ wzorem

$$g(y) = r(f(q^{-1}(y))),$$

gdzie $g: S^2 \rightarrow P^2$ i $r: S^1 \rightarrow S^1$ są odwzorowaniami ilorazowymi utożsamiającymi pary punktów antypodycznych. Określenie jest poprawne, bo $q^{-1}(y) = \{x, -x\}$, gdzie x jest punktem sfery S^2 , $f(\{x, -x\}) = \{f(x), -f(x)\}$ (bo f zachowuje antypodyzm), a odwzorowanie ilorazowe r przeprowadza parę $\{f(x), -f(x)\}$ w jeden punkt. Ciągłość g jest konsekwencją ogólnych własności odwzorowań ilorazowych. Mamy

$$(2) \quad r \circ f = g \circ q,$$

co ilustruje diagram

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ q \downarrow & & \downarrow r \\ P^2 & \xrightarrow{g} & S^1 \end{array}$$

Pokażemy, że (2) prowadzi do sprzeczności.

Rozważmy w tym celu drogę $\sigma: I \rightarrow S^2$ łączącą punkt wyróżniony b na S^2 z jego antypodą $-b$. Droga $q \circ \sigma: I \rightarrow S^2 \rightarrow P^2$ jest pętlą w P^2 w punkcie $q(b) = q(-b)$.

Mamy $g_*([q \circ \sigma]) = 0$, bo homomorfizm g_* , jako homomorfizm grupy Z_2 w grupę Z , jest zerowy.

Znaczy to, że $g \circ (q \circ \sigma) \simeq 0$, gdzie 0 jest pętlą zerową w S^1 zaczepioną w punkcie $g(q(b)) = r(f(b))$.

Wobec (2) droga $r \circ (f \circ \sigma)$ również powinna być pętlą zerową. Pokażemy, że tak nie jest, co zakończy dowód.

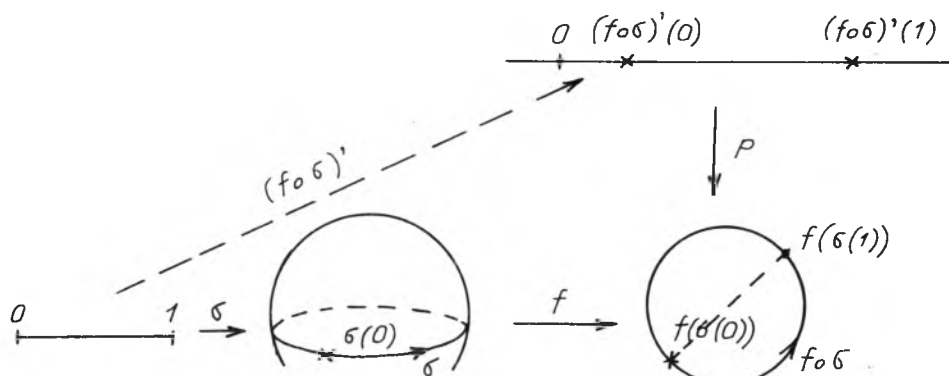
Zacznijmy od tego, że $f \circ \sigma$ jest drogą na S^1 łączącą w S^1 punkty antypodyczne $f(b)$ i $f(-b)$. Stąd, dla podniesienia $(f \circ \sigma)': I \rightarrow E$, mamy

$$(3) \quad (f \circ \sigma)'(1) - (f \circ \sigma)'(0) = (1/2) \bmod 2,$$

mając na myśli podniesienie do nakrycia $p: E \rightarrow S^1$, okręgu przez prostą, dane wzorem $p(t) = e^{2\pi i t}$.

Przyjmijmy z kolei, że odwzorowanie $r: S^1 \rightarrow S^1$, utożsamiające punkty antypodyczne, dane jest wzorem $r(z) = z^2$, co zgadza się z wcześniejszą 203

umową traktującą okręgi S^1 jako podzbiory płaszczyzny zespolonej określonej wzorem $|z| = 1$.



Rys. 135. Podniesienie drogi $f \circ \sigma$

Mamy $(r \circ (f \circ \sigma))(s) = ((f \circ \sigma)(s))^2 = (e^{2\pi i (f \circ \sigma)'(s)})^2 = e^{2(2\pi i (f \circ \sigma)'(s))}$, skąd

$$(r \circ (f \circ \sigma))'(s) = 2 \cdot (f \circ \sigma)'(s).$$

W rezultacie dostajemy $(r \circ (f \circ \sigma))'(1) - (r \circ (f \circ \sigma))'(0) = 2[(f \circ \sigma)'(1) - (f \circ \sigma)'(0)]$, co, wobec (3), znaczy, że stopień pętli $r \circ (f \circ \sigma)$ jest nieparzysty, skąd wynika, że pętla $r \circ (f \circ \sigma)$ jest niezerowa.

Wnioski z poprzedniego twierdzenia.

1. **Lemat.** Jeśli $f: S^2 \rightarrow E^2$ jest odwzorowaniem ciągłym takim, że stale jest $f(-x) = -f(x)$, to istnieje a takie, że $f(a) = 0$.

Dowód. Jeśliby było stale $f(x) \neq 0$, to wzór $g(x) = f(x)/|f(x)|$ określałby odwzorowanie ciągłe $g: S^2 \rightarrow S^1$ takie, że $g(-x) = -g(x)$. Sprzeczność.

2. **Twierdzenie Borsuka-Ułama o antypodach** (Borsuk, 1933)⁽²⁾. Jeśli $f: S^2 \rightarrow E^2$ jest odwzorowaniem ciągłym, to istnieje a takie, że $f(a) = f(-a)$.

Dowód. Przypuśćmy, że jest stale $f(x) = f(-x)$. Weźmy pod uwagę odwzorowanie $\varphi: S^2 \rightarrow E^2$ dane wzorem $\varphi(x) = f(x) - f(-x)$. Odwzorowanie φ jest ciągłe i jest stale $\varphi(-x) = \varphi(x)$, przy czym $\varphi(x)$ nigdzie się nie zeruje. Sprzeczność z lematem.

Twierdzeniu Borsuka-Ułama nadaje się nieraz postać anegdotyczną. Odwzorowanie $f: S^2 \rightarrow E^2$ jest parą funkcji o wartościach rzeczywistych (dwie współrzędne wartości odwzorowania f). Jeśli interpretować je na przy-

⁽²⁾ K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Mathematicae 20 (1933), 177—190.

kład jako temperaturę i ciśnienie w punkcie powierzchni kuli ziemskiej, to teza twierdzenia daje istnienie pary antypod, w których warunki meteorologiczne ze względu na te dwie cechy są te same.

Skoro, w szczególności, przy każdym odwzorowaniu ciągłym sfery S^2 w płaszczyznę pewne dwa punkty muszą ulec identyfikacji, z twierdzenia Borsuka-Ulama dostaje się jako wniosek, że sfera S^2 nie zanurza się w płaszczyznę. Ten wniosek (w dowolnym wymiarze niezanurzalność S^n w E^n) wynika również z twierdzenia o zachowaniu otwartości (wykład 3, s. 94).

3. Twierdzenie Lusternika-Sznirelmana⁽³⁾. *Jeśli trzy zbiory otwarte pokrywają sferę S^2 , to co najmniej jeden z nich zawiera parę punktów antypodycznych.*

Dowód. Dla danych zbiorów otwartych U , V i W pokrywających sferę S^2 weźmy pod uwagę zbiory domknięte D , E i F , również pokrywające sferę, i takie, że

$$D \subset U, E \subset V \text{ i } F \subset W.$$

Istnienie tak zmniejszonego pokrycia wynika z twierdzenia dowiedzonego w *Aneksie* (s. 69).

Niech α , β i γ będą funkcjami ciągłymi określonymi na S^2 o wartościach w odcinku $0 \leq y \leq 1$ takimi, że

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in D \\ 0 & \text{dla } x \in S^2 - U, \end{cases}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in E \\ 0 & \text{dla } x \in S^2 - V, \end{cases}$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in F \\ 0 & \text{dla } x \in S^2 - W, \end{cases}$$

których istnienie zapewnia lemat Urysohna (*Aneks*, s. 63).

Rozważmy funkcje ciągle określone dla x ze sfery S^2 wzorami $f(x) = \alpha(x) - \beta(x)$ i $g(x) = \beta(x) - \gamma(x)$, które razem składają się na odwzorowanie $h = (f, g): S^2 \rightarrow E^2$. Na mocy twierdzenia Borsuka-Ulama istnieje a takie, że

$$(4) \quad h(a) = h(-a).$$

⁽³⁾ L. Lusternik, L. Sznirelman, *Topologiczskie metody w wariacyjnych zadaniach*, Issl. Inst. Mat. i Mech. M.G.U., Moskwa 1930 (cyt. za Borsukiem, 1933); *Topologiczskie metody w wariacyjnych zadaniach i ich przyłożenia k differencjalnoj geometrii powierzchnostej*; *Uspiechi Matematycznych Nauk* (Nowaja Seria) 2 (1)(17)(1947), s. 166—217.

Punkt a należy do co najmniej jednego spośród zbiorów D , E i F . Przyjmijmy, że $a \in D$. Mamy $\alpha(a) = 1$. Nie może być $\alpha(-a) > 0$, bo byłoby wtedy $-a \in U$, skąd wynikałoby, że zbiór U zawiera parę punktów antypodycznych. Jest zatem $\alpha(-a) = 0$. Z wzoru (4) wynika teraz, że $f(a) = f(-a)$. Prowadzi to do

$$1 - \beta(a) = -\beta(-a),$$

skąd $\beta(a) = 1$ i $\beta(-a) = 0$. Z wzoru (4) dostajemy również $g(a) = g(-a)$, co prowadzi do $\gamma(a) = 1$ i $\gamma(-a) = 0$.

Widzimy więc, że wszystkie trzy funkcje α , β i γ znikają w punkcie $-a$. Stąd wniosek, że punkt $-a$ nie należy do żadnego ze zbiorów U , V i W wbrew założeniu, że zbiory te pokrywają sferę.

* * *

Innym wnioskiem z dowiedzionych twierdzeń — nie należącym już do topologii, bo pojawiają się w nim pojęcia teorii miary — jest następujące:

Twierdzenie o kanapce⁽⁴⁾. *Dane są trzy bryły położone w E^3 . Istnieje płaszczyzna, która tnie wszystkie trzy bryły na połowy co do objętości.*

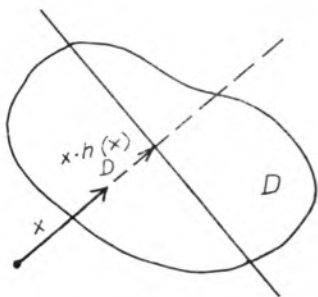
U w a g i p r z e d d o w o d e m. Przez bryłę rozumiemy podzbiór przestrzeni E^3 ograniczony i mierzalny w sensie Lebesgue'a. Dowód ograniczymy do przypadku takich podzbiorów, że ich części zawarte między każdymi dwiema równoległymi do siebie płaszczyznami mają miary dodatnie, jeśli mają tam jakieś punkty. Bez tego założenia dowód jest trudniejszy. Za znane będziemy uważać twierdzenie z teorii miary, orzekające że miara zbioru odciętego półprzestrzenią z danego zbioru mierzalnego D zależy w sposób ciągły od parametrów określających tę półprzestrzeń⁽⁵⁾.

W szczególności funkcja $H_D(x, t)$, gdzie x jest wektorem (założmy, że jednostkowym), a t liczbą rzeczywistą, określona jako stosunek, w którym płaszczyzna prostopadła do wektora x i przechodząca przez punkt tx tnie zbiór D , jest funkcją ciągłą.

Dzięki przyjetemu ograniczeniu, przy ustalonym x , funkcja $H_D(x, t)$ przyjmuje maksimum, równe 1, dokładnie w jednym punkcie $h_D(x)$; płasz-

⁽⁴⁾ Twierdzenie o kanapce było ogłoszone w 1933 r. jako wspólna nota kilku autorów w *Mathesis* Polskiej. Dowód jest w pracy H. Steinhausa, *Sur la division des ensembles de l'espace par les plans et des ensembles planes par les cercles*, *Fundamenta Mathematicae* 33 (1945), 245—263, gdzie można znaleźć również twierdzenie o istnieniu okręgu na płaszczyźnie tnącego na pół trzy dane obszary; patrz też wzmianka w *Kalejdoskopie matematycznym*, Warszawa 1989, s. 140, rys. 160.

⁽⁵⁾ Miarę rozumie się w sensie Lebesgue'a. Części odcięte półprzestrzeniami ze zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a są nadal mierzalne w sensie Lebesgue'a. Ciągłość zależności miary odciętej części od parametrów określających półprzestrzeń jest twierdzeniem teorii miary; por. przypis (5) w wykładzie 3.



Rys. 136. Płaszczyzna prostopadła do x , przechodząca przez koniec wektora $h_D(x)x$, połowi bryłę D

pomnijmy, że x przebiega sferę S^2 , a t odcinek prosty. Wspomniany zbiór jest wykresem funkcji h_D . Domkniętość wykresu implikuje ciągłość funkcji.

Odnotujemy jeszcze, że

$$(5) \quad h_D(-x) = -h_D(x),$$

co jest oczywiste.

Dowód twierdzenia o kanapce. Niech A , B i C będą bryłami położonymi w E^3 . Rozważmy funkcje φ_{AB} i φ_{BC} określone dla x ze sfery S^2 wzorami

$$\varphi_{AB}(x) = h_A(x) - h_B(x),$$

$$\varphi_{BC}(x) = h_B(x) - h_C(x),$$

Obie funkcje razem określają odwzorowanie ciągle $\varphi = (\varphi_{AB}, \varphi_{BC}): S^2 \rightarrow E^2$. Z własności (5) funkcji h_D dla D równego A , B i C wynika, że jest stale $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. Na mocy lematu istnieje punkt a na S^2 taki, że $\varphi(a) = 0$. Dla tego punktu jest $h_A(a) = h_B(a) = h_C(a)$. Znaczy to, że płaszczyzna prostopadła do wektora a i przechodząca przez punkt ta , gdzie t jest wspólną wartością funkcji h_A , h_B i h_C w punkcie a , tnie bryły A , B i C na pół co do objętości.

czyzna prostopadła do x , przechodząca przez punkt $h_D(x)$, połowi wtedy bryłę D .

Liczba $h_D(x)$ zależy w sposób ciągły od x .

Dla dowodu, odnotujemy, że wobec ciągłości funkcji H_D zbiór $H_D^{-1}(1)$, tj. zbiór tych par (x, t) , dla których $H_D(x, t) = 1$ (inaczej zbiór par (x, t) , dla których płaszczyzna prostopadła do x i przechodząca przez (x, t) tnie na pół bryłę D co do objętości), jest podzbiorem domkniętym produktu $S^2 \times E$, gdzie E oznacza prostą; przy-

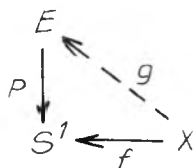
WYKŁAD 12. Odwzorowania w S^1 • Metoda Eilenberga • Twierdzenia Janiszewskiego o rozcinianiu płaszczyzny • Jednosprzęgłość sfer S^n , $n \geq 2$

Odwzorowania ciągle z X w S^1 decydują — na mocy twierdzenia Borsuka (wykład 6, s. 142) — o rozcinianiu przez X — jeśli jest zwarte — płaszczyzny; kryterium rozciniania polega na istnieniu odwzorowań istotnych (tj. niehomotopijnych ze stałymi) w S^1 .

Ustalmy, że okrąg S^1 jest zbiorem liczb zespolonych z o module 1, $|z| = 1$.

Jeśli odwzorowanie ciągle $f: X \rightarrow S^1$ ma podniesienie do odwzorowania $g: X \rightarrow E$, czyli daje się przedstawić w postaci $f = p \circ g$, gdzie $p: E \rightarrow S^1$ jest nakryciem okręgu S^1 przez prostą E danym wzorem $p(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in E$, to f jest nieistotne.

Twierdzenie to ilustruje diagram



Jest tak, ponieważ homotopia H łącząca odwzorowanie g ze stałą (wszystkie odwzorowania w prostą są homotopijnie stałe) wyznacza homotopię $p \circ H$ łączącą f ze stałą.

Wzór $f = p \circ g$ nie znaczy nic innego niż stwierdzenie, że $f(x) = e^{2\pi i g(x)}$ dla każdego x ze zbioru X . Oczywiście, jeśli g jest podniesieniem dla f , to pozostaje podniesieniem dla f po dodaniu dowolnej stałej całkowitej.

Prawdziwe jest twierdzenie odwrotne: *Jeśli $f: X \rightarrow S^1$ jest nieistotne, to istnieje podniesienie $g: X \rightarrow E$ odwzorowania f , a więc $f = p \circ g$.*

Dla dowodu, odnotujmy najpierw, że odwzorowanie stałe ma zawsze podniesienie.

Zauważmy dalej, że jeśli odwzorowanie f ma podniesienie, a odwzorowanie f nie jest nigdzie antypodyczne z f' , tj. jeśli $f(x)$ i $f'(x)$ nie są dla żadnego x punktami antypodycznymi, to odwzorowanie f' ma również podniesienie.

Jeśli bowiem g jest podniesieniem dla f , a więc $g: X \rightarrow E$ jest odwzorowaniem takim, że stałe $f(x) = e^{2\pi i g(x)}$, to podniesieniem dla f' jest odwzorowanie g' dane wzorem

$$g'(x) = g(x) + a(x), \quad x \in X,$$

gdzie $a(x)$ jest jedyną liczbą a taką, że $|a| < 1/2$ i dla której $f'(x) = f(x) \cdot e^{2\pi i a}$ (nieantypodyczność $f'(x)$ i $f(x)$).

Nieantypodyczność odwzorowań f i f' jest zapewniona, jeśli $|f(x) - f'(x)| < 2$ dla każdego x ; przypomnijmy, że 2 to średnica okręgu S^1 .

Po tych uwagach można przystąpić do zakończenia dowodu zapowiedzianego twierdzenia odwrotnego.

Niech $H: X \times [0, 1] \rightarrow S^1$ będzie homotopią danego odwzorowania nieistotnego z odwzorowaniem stałym $H(x, 1)$, $x \in X$. Wobec ciągłości (jednostajnej; przyjmujemy, że X jest zwarte) odwzorowania H istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $|t - t'| < \delta$, to $|h_t - h_{t'}| < 2$, gdzie przez h_u oznaczamy odwzorowanie $H(x, u)$, $x \in X$. Mamy $h_0 = f$; h_1 jest odwzorowaniem stałym.

Niech $0 < t_1 < \dots < t_k < 1$ będzie podziałem odcinka $[0, 1]$ takim, że odcinki $t_i t_{i+1}$ mają długość $< \delta$. Jeśli odwzorowanie h_{t_i} ma podniesienie, to — na mocy uwagi przed dowodem — odwzorowanie $h_{t_{i-1}}$ ma je również. Ponieważ odwzorowanie h_1 (stałe) ma podniesienie, więc przez przechodność, h_0 , tj. odwzorowanie f , ma podniesienie.

Odnajdujemy zatem jako wniosek następujące:

Twierdzenie. *Odwzorowanie ciągle $f: X \rightarrow S^1$ przestrzeni zwartej w okrąg jest nieistotne wtedy i tylko wtedy, gdy daje się przedstawić w postaci*

$$(1) \quad f(x) = e^{2\pi i g(x)}, \quad x \in X,$$

gdzie g jest odwzorowaniem ciągłym w prostą rzeczywistą.

Biorąc pod uwagę twierdzenie Borsuka o rozcinaniu (wykład 6, s. 142), w przypadku $n = 2$, dostajemy jako wniosek następujące:

Twierdzenie. *Zbiór zwarty X nie rozcina płaszczyzny wtedy i tylko wtedy, gdy każde odwzorowanie ciągle $f: X \rightarrow S^1$ ma postać (1).*

To ujęcie twierdzeń o rozcinaniu płaszczyzny pochodzi od Eilenberga (1936)⁽¹⁾.

Pierwsze twierdzenie Janiszewskiego (1913)⁽²⁾. *Jeśli żaden ze zbiorów zwartych A i B nie rozcina płaszczyzny i ich przekrój $A \cap B$ jest spójny, to ich suma $A \cup B$ nie rozcina płaszczyzny.*

Dowód. (Eilenberg, 1936). Niech $f: A \cup B \rightarrow S^1$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Wystarczy dowieść, że ma podniesienie. Ponieważ A i B nie rozcinają płaszczyzny, więc odwzorowania $f|_A$ i $f|_B$ mają podniesienia, co znaczy, że istnieją odwzorowania ciągłe

$$a: A \rightarrow E \quad i \quad b: B \rightarrow E$$

takie, że

$$(2) \quad f(x) = e^{2\pi i a(x)} \quad \text{dla } x \in A$$

$$(3) \quad f(x) = e^{2\pi i b(x)} \quad \text{dla } x \in B,$$

przy czym wzory (2) i (3) zgadzają się na $A \cap B$.

Dla x ze zbioru $A \cap B$ różnica $a(x) - b(x)$ musi być całkowita. Ponieważ $A \cap B$ jest spójne, a ta różnica jest ciągła, więc $a(x) - b(x)$ jest stałe. Zmieniając w (3) liczbę $b(x)$ o tę stałą, otrzymamy (na mocy jednej z początkowych uwag) podniesienie dla $f|_B$ zapisane tym samym wzorem, co podniesienie dla $f|_A$. Dostajemy więc

$$f(x) = e^{2\pi i a(x)} \quad \text{dla wszelkich } x \text{ ze zbioru } A \cup B.$$

Wnioskujemy stąd (po raz trzeci na mocy poprzedzającego twierdzenia), że $A \cup B$ nie rozcina płaszczyzny.

Przypomnijmy, że dla przestrzeni euklidesowych dowolnego wymiaru, dowodząc (wykład 6, s. 146) analogicznego twierdzenia, zakładaliśmy jednopunktowość przekroju $A \cap B$, wiedząc, że w przestrzeniach wymiaru ≥ 3 spójność przekroju nie wystarczy.

⁽¹⁾ S. Eilenberg, *Transformations continues en circonference et la topologie du plan*, Fundamenta Mathematicae 26 (1936), 61—112 i tegoż autora, *Sur les espaces multicoherents I*, Fundamenta Mathematicae 27 (1936), 151—190.

⁽²⁾ Z. Janiszewski, *O rozcinaniu płaszczyzny przez kontinua*, Prace mat.-fiz. 26 (1913), 11—63; w *Oeuvres choisies* Zygmunta Janiszewskiego, Warszawa 1962, na s. 141—193; samo twierdzenie na s. 178. W przeglądzie Wilkosa, *Les propriétés...* twierdzeniom Janiszewskiego i ich konsekwencjom — twierdzeniom Straszewicza — jest poświęcony „Chapitre 3”, s. 32. W książce *Topologie II* Kuratowskiego można je znaleźć na s. 355, a we *Wstępie...* tegoż autora w wyd. II na s. 238.

Drugie twierdzenie Janiszewskiego (1913)⁽³⁾. Jeśli A i B są kontinuumami na płaszczyźnie i ich przekrój $A \cap B$ nie jest spójny, to ich suma $A \cup B$ rozcina płaszczyznę.

Dowód (Eilenberg, 1936). Zbiór $A \cap B$, jako niespójny, rozpada się na zbiory domknięte C i D niepuste. Na mocy lematu Urysohna (*Aneks*, s. 63) istnieje odwzorowanie ciągłe

$$\varphi: A \cup B \rightarrow [0, 1/2]$$

takie, że $\varphi(x) = 0$, jeśli $x \in C$, i $\varphi(x) = 1/2$, jeśli $x \in D$.

Wzory

$$(4) \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} e^{2\pi i \varphi(x)}, & \text{jeśli } x \in A, \\ e^{-2\pi i \varphi(x)}, & \text{jeśli } x \in B, \end{cases}$$

określają odwzorowanie ciągłe $f: A \cup B \rightarrow S^1$ (na $A \cap B$ wzory (4) się zgadzają).

Jeśliby zbiór $A \cup B$ nie rozcinał płaszczyzny, to odwzorowanie f musiałoby mieć — na mocy pierwszego z dowiedzionych w tym wykładzie twierdzeń — postać

$$(5) \quad f(x) = e^{2\pi i \psi(x)} \text{ dla wszelkich } x \text{ ze zbioru } A \cup B,$$

gdzie ψ jest odwzorowaniem ciągłym zbioru $A \cup B$ w prostą.

Musiałby być zatem, wobec spójności zbiorów A i B , prawdziwe — przy pewnych liczbach całkowitych k i l — równości

$$\begin{aligned} & \psi(x) - \varphi(x) = k, \quad \text{jeśli } x \in A \\ \text{i} & \quad \psi(x) + \varphi(x) = l, \quad \text{jeśli } x \in B, \end{aligned}$$

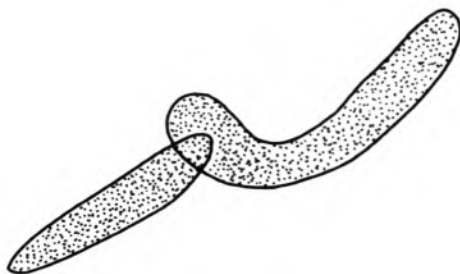
które — po odjęciu stronami — dają

$$\varphi(x) = \text{constans na } A \cap B,$$

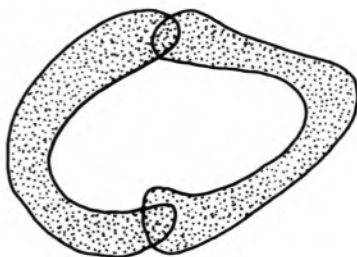
co jest nieprawdą, bo $\varphi|_C = 0$ i $\varphi|_D = 1/2$.

Prostym wnioskiem z drugiego twierdzenia Janiszewskiego jest główna teza twierdzenia Jordana: *krzywa zwykła zamknięta rozcina płaszczyznę*. Jest tak, ponieważ jest to suma dwu łuków o przekroju dwupunktowym.

⁽³⁾ Tamże, s. 195; w *Topologie II*, s. 354, a we *Wstępie...*, s. 238. Problemów ilościowych dotyczy praca S. Straszewicza *Über die Zerschneidung der Ebene durch abgeschlossene Mengen*, *Fundamenta Mathematicae* 7 (1925), 159—187; por. także trzy prace R.H. Binga (z lat 1945—1946) w *Collected Papers... II*, s. 305 i dalsze.



Rys. 137. Pierwsze twierdzenie Janiszewskiego



Rys. 138. Drugie twierdzenie Janiszewskiego

Przestrzeń X takie, że dla każdego ich przedstawienia w postaci

$$X = A \cup B,$$

gdzie A i B są kontinuumi, przekrój $A \cap B$ jest spójny, nazywa się *jednosprzęglymi*⁽⁴⁾.

Oczywiście, *okrąg nie jest jednosprzęgly*, co wynika z możliwości przedstawienia okręgu jako sumy dwóch półokręgów. *Odcinki proste są jednosprzęgłe*, co również jest oczywiste.

Natomiast wcale nie jest oczywiste to, że sfery S^n , $n \geq 2$ są jednosprzęgłe.

Będzie to wszakże łatwo widoczne, jeśli drugiemu twierdzeniu Janiszewskiego nadamy postać ilustrującą to, co zawiera dowód.

Twierdzenie (wersja formalna drugiego twierdzenia Janiszewskiego). *Jeśli A i B są podzbiorami spójnymi i domkniętymi przestrzeni normalnej i każde odwzorowanie z $A \cup B$ w okrąg S^1 ma podniesienie, to $A \cap B$ jest spójne.*

Jeśli dowód zaczniemy od przyjęcia *a contrario*, że $A \cap B$ jest niespójne, to znajdziemy się w warunkach dowodu drugiego twierdzenia Janiszewskiego.

Z tej formalnej wersji twierdzenia Janiszewskiego dostajemy (przyjmując $X = A \cup B$) bezpośrednio:

Wniosek. *Jeśli X jest przestrzenią normalną i spójną taką, że każde odwzorowanie $X \rightarrow S^1$ ma podniesienie, to X jest przestrzenią jednosprzęglą.*

To, że każde odwzorowanie $S^n \rightarrow S^1$, $n \geq 2$ ma podniesienie, wiemy z wykładu 10 (wniosek z twierdzenia na s. 192). Można tego dowieść także bezpośrednio (nie korzystając z twierdzeń o grupie podstawowej),

⁽⁴⁾ G. T. Whyburn, *Analytic topology*, Providence 1942, s. 228; systematyczny wykład teorii jednosprzęgłości, s. 219–238.

adaptując postępowanie z dowodu twierdzenia o podnoszeniu homotopii dróg (wykład 9, s. 181)⁽⁵⁾.

Stąd, zapowiedziane:

Twierdzenie. *Sfery S^n , $n \geq 2$, są jednosprzęgle.*

W zakresie kontynuów lokalnie spójnych jednosprzęgłość implikuje nieistotność ich odwzorowań w S^1 ⁽⁶⁾. W zakresie kontynuów bardziej osobliwych tego odwrócenia nie da się przeprowadzić: kontinua nierozkładalne są jednosprzęgle (warunek jednosprzęgłości jest spełniony w próżni). Są wśród nich też takie, które rozcinają płaszczyznę (np. brzeg jezior Wady), dzięki czemu mają, na mocy twierdzenia Borsuka o rozcinaniu, odwzorowania istotne w okrąg.

⁽⁵⁾ Sferę S^n , $n \geq 2$, można — dla każdego $\varepsilon > 0$ — rozłożyć na skończenie wiele kostek euklidesowych n -wymiarowych o średnicach $\leq \varepsilon$ z możliwością nadania im numeracji K_1, \dots, K_r , takiej, że przekroje $(K_1 \cup \dots \cup K_j) \cap K_{j+1}$ są dla każdego j spójne. To umożliwia przeprowadzenie konstrukcji podniesienia z dowodu wspomnianego twierdzenia. Dobrze jest przedtem się przekonać, że dla S^1 tego rodzaju rozkład nie istnieje.

⁽⁶⁾ Tamże, s. 228, Th. 7. 4.

WYKŁAD 13. Twierdzenia o antypodach w dowolnym wymiarze • Lemat Tuckera • Twierdzenie Lusternika-Sznirelmana • Twierdzenie o nieistnieniu odwzorowań $S^n \rightarrow S^{n-1}$ zachowujących antypodyzm • Twierdzenie Borsuka-Ulama • Kilka twierdzeń związanych z poprzednimi

Z twierdzeniami o antypodach spotkaliśmy się w poprzednim wykładzie, ale jedynie dla sfery S^2 .

Twierdzenia te mają przeniesienia na wyższe wymiary, a ich wspólnym źródłem jest lemat kombinatoryczny Tuckera (1945) — analogon sferyczny lematu Spernera⁽¹⁾. Lemat Tuckera — mimo że dotyczy dowolnego wymiaru — jest środkiem prostszym niż grupa podstawowa, w której pojawia się

⁽¹⁾ A. W. TUCKER, *Some topological properties of disk and sphere*, Proceedings, Canadian Mathematical Congress, Montreal 1945, 285—309. Lemat jest sformułowany na s. 135 książki Solomona Lefschetza, *Introduction to topology*, Princeton 1949. Dowodzona tu wersja lematu pochodzi z książki J. Dugundjiego i A. Granas, *Fixed point theory I*, Warszawa 1982, s. 40. Wersję kostkową można znaleźć w artykule H. Hadwiger, *Elementare Kombinatorik und Topologie*; *Elemente der Mathematik* 15, Nr 3 (1960), 49—72. Ky Fan w pracy *A generalization of Tucker's Combinatorial lemma with topological applications*, *Annales of Mathematics* 56 (1952), 431—437, uogólnił lemat Tuckera z celem uzyskanych ogólniejszych sformułowań twierdzeń Lusternika-Sznirelmana.

Por. także lematy kombinatoryczne: M. A. Krasnosielski, *Topologičeskie metody w teorii nelinejnych integralnych urawnienij*, Moskwa 1956, s. 88 i dalsze; Benjamin Weiss, *A combinatorial proof of the Borsuk-Ulam antipodal point theorem*, *Israel Journal of Math*, 66 (1989), 364—368.

Aproksymacja kombinatoryczna może być zastąpiona aproksymacją wielomianami. Por. prace: J. K. Arason, A. Pfister, *Quadratische Formen über affinen Algebren und ein algebraischer Beweis des Satzes von Borsuk-Ulam*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 331 (1982), 181—184; M. Knebusch, *An algebraic proof of the Borsuk-Ulam theorem for polynomial mappings*, *Proceedings of the American Mathematical Society* 84 (1982), 29—32.

pojęcie orientacji (dróg i pętli). Z lematu Tuckera wyprowadza się jedno twierdzenie: twierdzenie Lusternika-Sznirelmana. Inne, wśród nich twierdzenie Borsuka-Ulama, dostaje się środkami topologii ogólnej. Twierdzenie o kanapce — podane tu bez dowodu, bo jest ono prostą adaptacją dowodu z wymiaru 2, jest konsekwencją twierdzenia o nieistnieniu odwzorowań antypodycznych $S^n \rightarrow S^{n-1}$.

Podstawowa triangulacja symetryczna sfery S^n . Niech w V^{n+1} kula Q^{n+1} będzie reprezentowana przez zbiór punktów

$$|x_0| + \dots + |x_n| \leq 1,$$

a sfera S^n — brzeg kuli Q^{n+1} — przez zbiór

$$|x_0| + \dots + |x_n| = 1.$$

Sfera S^n jest sumą 2^n sympleksów n -wymiarowych

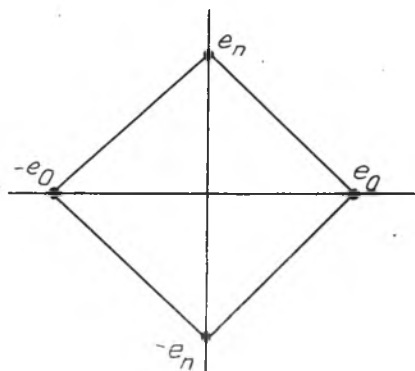
$$(1) \quad \varepsilon_0 x_0 + \dots + \varepsilon_n x_n = 1,$$

gdzie $\varepsilon_i = 1$ lub -1 ; w szczególności, jeśli wszystkie ε_i są równe 1, dostajemy rozważany dotąd sympleks wzorcowy $x_0 + \dots + x_n = 1$.

Zbiór tych 2^n sympleksów wraz z ich ścianami stanowi triangulację sfery S^n . Jest to triangulacja symetryczna: sympleksowi (1) odpowiada symetryczny doń sympleks

$$-\varepsilon_0 x_0 - \dots - \varepsilon_n x_n = 1.$$

Oznaczmy tę triangulację przez T , nazywając ją dalej *triangulacją podstawową sfery S^n* .



Rys. 139. Triangulacja podstawowa sfery S^n

Wierzchołkami triangulacji T są punkty (wektory) $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ i $-e_j = (0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$, $j = 0, \dots, n$ z jedynką lub minus jedynką na j -tym miejscu.

Na każdym sympleksie (1) dokonajmy podziału barycentrycznego, co nam da podział rozważanej triangulacji T . Jest to podział symetryczny w tym sensie, że wraz z każdym sympleksem należy doń sympleks z nim środkowo (tj. względem punktu $0 = (0, \dots, 0)$) symetryczny. Symetryczne pozostają podziały iterowane; jest

to w dodatku podział *prawidłowy* w tym znaczeniu, że triangulacje dziedziczą się na podsferę

$$x_{i_1} = 0, \dots, x_{i_k} = 0.$$

Lemat Tuckera (Tucker 1945; patrz Lefschetz 1949, s. 135). *Niech T' będzie triangulacją symetryczną prawidłową sfery S^n będącą podziałem jej triangulacji podstawowej T . Niech φ będzie odwzorowaniem zbioru wierzchołków triangulacji T' w zbiór wierzchołków triangulacji T (tj. w zbiór $\{e_0, \dots, e_n; -e_0, \dots, -e_n\}$) takim, że*

$$(2) \quad gw_{|T'|} a_1 \cap \dots \cap gw_{|T'|} a_k \neq \emptyset \Rightarrow gw_{|T|} \varphi(a_1) \cap \dots \cap gw_{|T|} \varphi(a_k) \neq \emptyset,$$

$$(3) \quad \varphi(-a) = -\varphi(a).$$

Dla każdego sympleksu triangulacji T , tj. dla każdego zbioru wierzchołków triangulacji T postaci $\{\varepsilon_0 e_0, \dots, \varepsilon_n e_n\}$, $\varepsilon_j = 1$ lub -1 , istnieje sympleks triangulacji T' taki, że φ przyjmuje na zbiorze jego wierzchołków wszystkie wartości $\varepsilon_0 e_0, \dots, \varepsilon_n e_n$, tj. przyjmuje jako wartości wszystkie wierzchołki danego sympleksu triangulacji T ; więcej, ilość sympleksów triangulacji T' , mającej wspomnianą własność, jest dla każdego sympleksu triangulacji T nieparzysta.

Uwagi przed dowodem. Zbiory $\{\varepsilon_0 e_0, \dots, \varepsilon_n e_n\}$ wartości funkcji φ są wszystkie równouprawnione. Przez zmianę numeracji wektorów e_j i ich znaków rozważania można zredukować do jednego ustalonego zbioru. Ze względów, które okażą się w trakcie dowodu, wyróżniony zostanie, jako zbiór wartości, zbiór

$$\{e_0, -e_1, \dots, (-1)^n e_n\}.$$

Lematu Tuckera dowodzi się przez indukcję i z tego powodu pewna jego mocniejsza wersja będzie odpowiedniejsza dla dowodu.

Przy ustalonym n i dla każdego k , $k \leq n$, rozważmy triangulacje symetryczne prawidłowe L sfer S^k i funkcje określone na zbiorach wierzchołków tych triangulacji o wartościach w zbiorze

$$\{e_0, \dots, e_n, -e_0, \dots, -e_n\},$$

spełniające warunki (2) i (3). Sympleks k -wymiarowy tego rodzaju triangulacji L nazwiemy *wyróżnionym pozytywnie*, jeśli zbiór wartości, jakie funkcja przyjmuje na jego wierzchołkach, jest postaci

$$\{e_{i_0}, -e_{i_1}, \dots, (-1)^k e_{i_k}\},$$

gdzie $i_0 < i_1 < \dots < i_k$. Jeśli ten zbiór wartości, przy tej samej umowie co do porządku wśród i_j , jest postaci

$$\{-e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, (-1)^{k+1} e_{i_k}\},$$

to sympleks nazwiemy wyróżnionym negatywnie.

Dwie następujące własności sympleksów wyróżnionych zostaną wykorzystane w dowodzie:

(a) Sympleksy k -wymiarowe wyróżnione pozytywnie, jak również sympleksy k -wymiarowe wyróżnione negatywnie, mają dokładnie po jednej ścianie $(k-1)$ -wymiarowej wyróżnionej pozytywnie.

Jest to ściana powstała przez opuszczenie ostatniego wierzchołka w przypadku sympleksu wyróżnionego pozytywnie, a przez opuszczenie pierwszego wierzchołka w przypadku sympleksu wyróżnionego negatywnie.

(b) Sympleksy k -wymiarowe nie wyróżnione, jeśli mają ściany $(k-1)$ -wymiarowe wyróżnione pozytywnie, to dokładnie dwie.

Dla dowodu zauważmy, że sympleks k -wymiarowy nie wyróżniony ma ściany $(k-1)$ -wymiarowe wyróżnione pozytywnie, jeśli wśród wartości przyjętych na jego wierzchołkach pojawia się co najmniej k spośród wierzchołków e_0, \dots, e_n . Może się to zdarzyć jedynie w dwóch przypadkach: albo jedno e_j powtarza się w tym zbiorze wartości (ze względu na (3), z tym samym znakiem), albo wszystkie e_j są różne, ale w uporządkowaniu według wskaźników pewne dwa sąsiednie e_{i_r} i $e_{i_{r+1}}$ są opatrzone tym samym znakiem. W obu przypadkach usunięcie każdej ze wspomnianych dwu wartości daje ścianę $(k-1)$ -wymiarową wyróżnioną pozytywnie, jeśli tego rodzaju ściana w ogóle się pojawia.

Lemat Tuckera (wersja mocniejsza). Niech $k \leq n$. Niech L będzie triangulacją symetryczną prawidłową sfery S^k . Niech φ będzie funkcją przyjmującą na wierzchołkach triangulacji L wartości ze zbioru $\{e_0, \dots, e_n, -e_0, \dots, -e_n\}$ tak, że spełnione są warunki (2) i (3). Ilość sympleksów k -wymiarowych triangulacji L wyróżnionych pozytywnie jest nieparzysta.

Dowód (przez indukcję z ustalonym n ze względu na k).

1. Przypadek $k = 0$. Na sferze S^0 jest tylko jedna triangulacja $L = \{a, -a\}$ i funkcja φ spełniająca warunki (2) i (3) przyjmuje przy pewnym j obie wartości e_j i $-e_j$. Jest dokładnie jeden sympleks wyróżniony, a lub $-a$, ten, na którym wartością jest e_j .

2. Zakładając prawdziwość twierdzenia dla sfer $(k-1)$ -wymiarowych, rozważmy triangulację symetryczną prawidłową L sfery S^k i funkcję φ ze zbioru wierzchołków tej triangulacji w zbiór $\{e_0, \dots, e_n, -e_0, \dots, -e_n\}$, spełniający warunki (2) i (3).

Ograniczmy rozważanie triangulacji L do półsfery S_+^n i jej brzegu S^{n-1} .

Dla każdego sympleksu k -wymiarowego Δ na S_+^k odnotujmy liczbę $\alpha(\Delta)$ równą ilości ścian $(k-1)$ -wymiarowych tego sympleksu wyróżnionych pozytywnie. Niech κ będzie sumą wszystkich liczb $\alpha(\Delta)$, gdzie Δ przebiega wszystkie sympleksy k -wymiarowe w S_+^k . Każda ściana spoza brzegu S^{k-1} półsfery S_+^k powtarza się w tym sumowaniu dwa razy.

Stąd, $\kappa \equiv \beta(S^{k-1}), \text{ mod } 2,$

gdzie $\beta(S^m)$ jest symbolem dla oznaczenia ilości sympleksów m -wymiarowych na S^m wyróżnione pozytywnie.

Wobec (b), w sumowaniu mod 2 można ograniczyć się do sympleksów Δ wyróżnionych (pozytywnie lub negatywnie). Wobec (a), pozostała suma jest równa $\Omega' + \Omega''$, gdzie Ω' jest ilością sympleksów k -wymiarowych na S_+^k wyróżnionych pozytywnie, a Ω'' ilością tego rodzaju ścian wyróżnionych negatywnie.

Jest więc

$$\Omega' + \Omega'' = \beta(S^{k-1}) \text{ mod } 2.$$

Wobec symetrii triangulacji L , liczba Ω'' jest równa ilości sympleksów k -wymiarowych na S^k wyróżnionych pozytywnie.

Zatem, $\Omega' + \Omega'' = \beta(S^k)$, a w rezultacie

$$\beta(S^k) \equiv \beta(S^{k-1}) \text{ mod } 2.$$

Wobec założonej indukcyjnie nieparzystości liczb $\beta(S^{k-1})$ dostajemy nieparzystość liczby $\beta(S^k)$.

Wobec dowiedzionej w pierwszym kroku równości $\beta(S^0) = 1$, dowód indukcyjny został zakończony.

Przypadek $k = n$ pokrywa się z tezą twierdzenia.

* * *

Twierdzenie. Niech U_0, \dots, U_n będą zbiorami otwartymi sfery S^n pokrywającymi wraz ze swymi obrazami antypodycznymi $-U_0, \dots, -U_n$ sferę S^n . Jeśli żaden ze zbiorów U_j nie zawiera pary punktów antypodycznych, to $U_0 \cap \dots \cap U_n \neq \emptyset$.

Dowód. Niech T' będzie podziałem symetrycznym triangulacji podstawowej T sfery S^n na tyle drobnym, by średnice gwiazd $gw_{|T'|}$, a wierzchołków a triangulacji T nie przekraczały liczby Lebesgue'a δ pokrycia

$$(4) \quad P = \{U_0, \dots, U_n, -U_0, \dots, -U_n\}.$$

Dla każdego wierzchołka a triangulacji T istnieje co najmniej jeden zbiór V pokrycia P taki, że

$$(5) \quad gw_{|T'|} a \subset V.$$

Ustalamy jeden z tych zbiorów V dla każdego a w ten sposób, że jest to U_j lub $-U_j$ z najmniejszym j w numeracji z (4), dla którego (5) jest prawdziwe. Otrzymujemy funkcję $\varphi' : W' \rightarrow P$ określoną na zbiorze W' wierzchołków

$$(6) \quad gw_{|T'|} a_1 \cap \dots \cap gw_{|T'|} a_k \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(a_1) \cap \dots \cap \varphi'(a_k) \neq \emptyset, \\ \varphi'(-a) = -\varphi'(a).$$

Elementom pokrycia P przypiszmy w sposób wzajemnie jednoznacznie wierzchołki triangulacji podstawowej T , przypisując zbiorom U_j wierzchołki e_j tej triangulacji, a zbiorom $-U_j$ wierzchołki $-e_j$. W ten sposób otrzymujemy odwzorowanie φ ze zbioru wierzchołków triangulacji T' w zbiór wierzchołków triangulacji T spełniające warunki (2) i (3).

Na mocy lematu Tuckera istnieje sympleks triangulacji T' , na którego wierzchołkach funkcja φ przyjmuje wszystkie wartości e_0, \dots, e_n . Znaczący to, że funkcja φ' przyjmuje na wierzchołkach tego sympleksu wartości U_0, \dots, U_n . Na mocy (6) jest

$$U_0 \cap \dots \cap U_n \neq \emptyset,$$

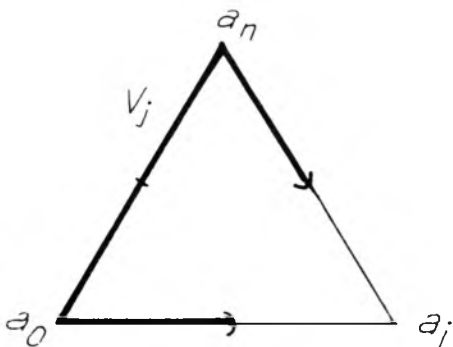
W szczególności rozważmy przypadek, kiedy zbiory U_0, \dots, U_n same, bez swoich obrazów antypodycznych, pokrywają S^n . Jeśli $U_0 \cap \dots \cap U_n \neq \emptyset$, to antypoda punktu z przekroju $U_0 \cap \dots \cap U_n$ należy do któregoś ze zbiorów U_j . Dostajemy w ten sposób:

Twierdzenie Lusternika-Sznirelmana. *Jeśli zbiory otwarte U_0, \dots, U_n pokrywają sferę S^n , to co najmniej jeden z nich zawiera parę punktów antypodycznych.*

W nietrudny sposób otrzymujemy stąd następne twierdzenie z tego cyklu:

Twierdzenie 1. *Nie istnieje odwzorowanie sfery S^n w sferę S^{n-1} zachowujące antypodyzm.*

Dowód. Na sferze S^{n-1} istnieje konfiguracja $n+1$ zbiorów otwartych, pokrywających S^{n-1} , z których żaden nie zawiera pary punktów antypodycznych; mogą to być na przykład ściany sympleksu Δ^n powiększone o gwiazdy wierzchołków brzegu $\partial\Delta^n$ w podziale barycentrycznym sympleksu Δ^n (zbiory V_j na rys. 140).



Rys. 140. Jeden ze zbiorów konfiguracji na S^{n-1}

Jeśli $f: S^n \rightarrow S^{n-1}$ jest odwzorowaniem zachowującym antypodyzm, to wspomniana konfiguracja przechodzi na analogiczną konfigurację w S^n . Twierdzenie Lusternika-Sznirelmana wyklucza tego rodzaju konfigurację na S^n .

Dalsze dwa twierdzenia wynikają stąd na drodze znanej z poprzedniego wykładu.

Twierdzenie 2. *Jeśli $f: S^n \rightarrow E^n$ jest odwzorowaniem ciągłym zachowującym antypodyzm, tj. takim, że $f(-x) = -f(x)$ dla każdego x , to $f(x) = 0$ dla pewnego x .*

Twierdzenie 3 (Borsuka-Ulama). *Jeśli $f: S^n \rightarrow E^n$ jest odwzorowaniem ciągłym, to $f(x) = f(-x)$ dla pewnego x .*

Twierdzenie Borsuka-Ulama zawiera w sobie twierdzenia Brouwera o nieistnieniu retrakcji.

Dla dowodu przyjmijmy, że istnieje retrakcja kuli Q^n na jej brzeg S^{n-1} . Traktujmy tę retrakcję jako retrakcję $r: S_+^n \rightarrow S^{n-1}$ górnej półsfery S_+^n sfery S^n na równik S^{n-1} . Odwzorowanie $f: S^n \rightarrow S^{n-1}$ określone wzorem

$$f(x) = \begin{cases} r(x), & \text{jeśli } x \in S_+^n \\ -r(-x), & \text{jeśli } x \in S_-^n, \end{cases}$$

gdzie S_-^n jest dolną półsferą sfery S^n , jest ciągłe (wzory zgadzają się na części wspólnej S^{n-1} półsfery S_+^n i S_-^n). Odwzorowanie f zachowuje w oczywisty sposób antypodyzm. Sprzeczność z twierdzeniem 1.

Innym twierdzeniem równoważnym twierdzeniom 1—3 jest:

Twierdzenie 4. *Jeśli $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ jest odwzorowaniem nieistotnym, to $f(x) = f(-x)$ dla pewnego x .*

D o w ó d. Jako odwzorowanie nieistotne f ma przedłużenie $g: S_+^n \rightarrow S^{n-1}$. Odwzorowanie g może przedłużyć do odwzorowania $h: S^n \rightarrow Q^n$, przyjmując $h(x) = |\bar{x}| \cdot g(\bar{x})$, dla $x \in S_-^n$, gdzie \bar{x} jest punktem symetrycznym równikowo do x , a \bar{x} rzutem punktu x na Q^n . Na mocy twierdzenia 3 (Borsuka-Ulama) istnieje x na S^n takie, że $h(x) = h(-x)$ (odwzorowanie h traktujemy jako odwzorowanie w E^n , zakładając, że $Q^n \subset E^n$). Istniejący punkt x leży na S^{n-1} , bo dla x spoza S^{n-1} , jeśli założymy (co ze względu na symetrię nie ma znaczenia), że $x \in S_+^n$, mielibyśmy $|h(x)| = 1$ i $|h(-x)| = |\bar{x}| \cdot |g(-\bar{x})| < 1$.

Mając twierdzenie 4, łatwo dostaje się twierdzenie 1.

Dla dowodu przypuśćmy, wbrew twierdzeniu 1, że istnieje odwzorowanie $f: S^n \rightarrow S^{n-1}$ zachowujące antypodyzm. Jako odwzorowanie w S^n odwzorowanie f jest nieistotne, bo $f(S^n) \neq S^n$. Wobec twierdzenia 4, $f(x) = f(-x)$ dla pewnego x . Ale f zachowuje antypodyzm, więc $f(x) = -f(-x)$ dla tegoż x . Sprzeczność.

Ostatnie twierdzenie jest w łatwy sposób równoważne z następującym twierdzeniem Borsuka⁽²⁾:

Twierdzenie 5. *Jeśli $f: S^n \rightarrow S^n$ jest odwzorowaniem zachowującym antypodyzm, to jest istotne.*

⁽²⁾ K. Borsuk, *Drei Sätze über n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Mathematicae 20 (1933), 177—190; Satz I.

WYKAZ SYMBOLI

θ	— konfiguracja (krzywa) theta
V^{n+1}	— przestrzeń euklidesowa (wektorowa) $(n+1)$ -wymiarowa
E^n	— przestrzeń euklidesowa n -wymiarowa
Δ^n	— sympleks n -wymiarowy (między innymi wzorcowy)
$gw_{\Delta^n} a_j$	— gwiazda wierzchołka a_j w sympleksie Δ^n
$\Delta(a_0, \dots, a_n)$	— sympleks o wierzchołkach a_0, \dots, a_n
$\lambda_j(a)$	— j -ta współrzędna barycentryczna punktu (wektora) a względem układu wektorów liniowo niezależnych a_0, \dots, a_n
$\partial \Delta^n$	— brzeg sympleksu Δ^n
diam A	— średnica zbioru A
$ K $	— bryła triangulacji K
K^0	— zbiór wierzchołków triangulacji K
$gw_{ K } a_j$	— gwiazda wierzchołka a_j w wielościanie $ K $ względem jego triangulacji K ; jeśli $ K = \Delta^n$ lub $ K = \partial \Delta^n$, to symbole $gw_{\Delta^n} a_j$ i $gw_{\partial \Delta^n} a_j$ oznaczają gwiazdy w tych wielościanach względem ich triangulacji złożonych ze ścian sympleksu Δ^n (włączając sam sympleks, w przypadku $ K = \Delta^n$)
$ g $	— odwzorowanie brył triangulacji wyznaczone przez odwzorowanie symplecjalne g tych triangulacji
I	— odcinek prostej (domknięty, tj. z końcami; jeśli nie pisze się, że jest inaczej, jest to odcinek $0 \leq t \leq 1$)
I^n	— kostka euklidesowa n -wymiarowa (rozumiana jako produkt $I \times \dots \times I$, n razy)
Q^n	— kula euklidesowa domknięta, $x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1$
S^n	— sfera euklidesowa n -wymiarowa, $x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1$; brzeg ∂Q^{n+1} kuli $(n+1)$ -wymiarowej
AR	— retrakt absolutny
$f: X \rightarrow Y$	— odwzorowanie; ciągle, jeśli nie zastrzeżę się, że jest inaczej

Q	— symbol rezerwowany dla kostki Hilberta
$\mu(A)$	— miara (Lebesgue'a) zbioru A
π	— liczba „pi”
i	— na przykład w symbolu $e^{i\varphi}$ — jednostka urojona
$\dim X$	— wymiar pokrywowy przestrzeni X
\simeq	— symbol homotopijności odwzorowań
$N(P)$	— nerw pokrycia P
\simeq	— również symbol dla równoważności dróg (pętli)
$\pi_1(X, x_0)$	— grupa podstawowa przestrzeni X w punkcie x_0
$\pi_1(X)$	— grupa podstawowa przestrzeni X
φ	— izomorfizm wyznaczony przez drogę φ
$f_{\#}$	— homomorfizm wyznaczony przez odwzorowanie f
P^2	— powierzchnia rzutowa

WYKAZ NAZW

Antypodyzm 131
aproksymacja symplecjalna 59

Barycentrum 47
bryła triangulacji 54
bryły platońskie 17
brzeg (geometryczny) sympleksu 46
brzeg (topologiczny) zbioru 26

Deformacja 122
długość wektora 42
dodawanie dróg 165
dodawanie klas dróg równoważnych 166
droga 164
dywan Sierpińskiego 96

Ekstensor absolutny AE 67
 ε -odwzorowanie 177

Graf 12
gwiazda wierzchołka sympleksu 45
gwiazda wierzchołka triangulacji 58
grupa podstawowa 169

Homotopia odwzorowań — ogólnie 120
homotopia (równoważność) dróg 165
homomorfizm wyznaczony przez odwzorowanie 174

Izomorfizm triangulacji 54

Jednosprzęgłość 212

Kombinacja liniowa 42
konfiguracja θ 31
konfiguracja (krzywa) θ w szerszym sensie 152
kostka Hilberta 71
kostka euklidesowa I^n n -wymiarowa 66
krotność pokrycia 111
krzywa trójkątowa Sierpińskiego 96
krzywa uniwersalna Sierpińskiego — patrz dywan
krzywa zwykła zamknięta 151

Liczba Lebesgue'a 70

Łamana 24
łamana zamknięta 24
łuk 144

Nakrycie 187
nakrycie wzorcowe okręgu przez prostą 178
nerw pokrycia 115
niezależność wektorów 42
numeracja Spernera 78

Obszar 25
odcinek 44
odwzorowanie nakrywające — patrz nakrycie
odwzorowanie istotne nieistotne w S^n 128
odwzorowanie istotne na Q^n 134
odwzorowanie w nerw pokrycia 116
odwzorowanie zachowujące antypodyzm 202

Pętla 165
podniesienie drogi 179
podniesienie odwzorowania 188
podział barycentryczny 50
podział przestrzeni E^n na sektory 53
podział sympleksyjny — patrz triangulacja
położenie ogólne 56
powierzchnia Kleina 200
powierzchnia rzutowa 199

przedłużenie odwzorowania 65
przestrzeń euklidesowa n -wymiarowa E^n 43
przestrzeń jednospójna 170
przestrzeń lokalnie spójna 25
przestrzeń ściągalna 122
przestrzeń wektorowa 41
punkt stały odwzorowania 102
punkt incydencji pary odwzorowań 132

Retrakt, retrakcja, retrakt absolutny AR 68
rozcinanie, rozspajanie przestrzeni E^n 140
rzut stereograficzny 15

Składowa 25
sympleks wzorcowy n -wymiarowy 44
sympleks $\Delta(a_0, \dots, a_n)$ 45

Ściana sympleksu 46

Torus 194
triangulacja 53
typ homotopii 126

Wielościan (bryła triangulacji) 57
własność punktu stałego 102
współrzędne barycentryczne 43
wstęga Möbiusa 127 (rys. 84)
wymiar pokryciowy 112
wymiar triangulacji 55

Zbiory jednakowo położone — położone inaczej 161—162
zbiór wypukły 46

WYKAZ TWIERDZEŃ

- zadanie o mostach królewieckich 11
- wzór Eulera (dla grafów na płaszczyźnie) 15
- o bryłach platońskich 17
- aksjomat Pascha 21
- twierdzenie Jordana-Dehna (twierdzenie Jordana dla łamanych) 27
- twierdzenie o konfiguracji (krzywej) θ 31
- niespłaszczalność grafów Kuratowskiego 33
- twierdzenie Moore'a o triodach 35
- twierdzenie Schoenfliesa dla łamanych 36
- lemat o wolnej przekątnej 37
- podział barycentryczny sympleksu 47
- pierwsze twierdzenie o realizacji triangulacji 55
- drugie twierdzenie o realizacji triangulacji (w E^{2n+1}) 56
- twierdzenie o aproksymacji symplijalnej 59
- sposzczenie Lebesgue'a 61
- lemat Urysohna 63
- twierdzenie Tietzego 64
- twierdzenie o zmniejszaniu zbiorów w pokryciach 69
- lemat Lebesgue'a (liczba Lebesgue'a pokrycia) 70
- zawartość kostki Hilberta 71
- twierdzenia o nieistnieniu retrakcji sympleksu (kuli) na brzeg 74—80
- lemat Spernera 77
- twierdzenie Kuratowskiego-Steinhaus'a 81
- twierdzenie Urbanika 83
- twierdzenie o niepustości wnętrza przy zanurzeniu Δ^n w E^n 85

twierdzenie o niehomeomorficzności sympleksów różniących się wymiarami 87
 twierdzenie o niehomeomorficzności przestrzeni euklidesowych różniących się wymiarami 87, 95
 twierdzenie Spernera o zamocowaniu 88
 twierdzenie o zachowaniu otwartości 94, 145
 twierdzenie orzekające, że sfera S^n nie ma zanurzeń w E^n 96
 twierdzenie Brouwera o punkcie stałym 102
 twierdzenie Bohla 104
 twierdzenie o nieistnieniu odwzorowania sympleksu (kuli) na brzeg będącego na brzegu antypodyzmem 105
 kostka Hilberta ma własność punktu stałego 106
 $\dim A^n = n$ (sprawdzian teorii wymiaru) 113
 twierdzenie Menger—Nöbelinga (o zanurzeniu w E^{2n+1}) 117
 ściągłość przestrzeni wypukłych 122
 nieściągłość sfer 123
 niesplaszczalność wstęgi Möbiusa 127
 o nieistotności odwzorowań wielościanów w sfery wymiaru wyższego 128
 lemat o przedłużaniu homotopii 129
 twierdzenie o przedłużaniu dla odwzorowań nieistotnych w S^n 131
 twierdzenie o nieistnieniu odwzorowania kuli (sympleksu) na brzeg, które byłoby na brzegu odwzorowaniem istotnym 131
 para odwzorowań koła na siebie bez punktów incydencji 132
 twierdzenia Łokuciewskiego o punktach incydencji 133
 twierdzenie Holsztyńskiego 135
 twierdzenie Łokuciewskiego o punkcie stałym 135
 własność punktu stałego dla kostki Hilberta i kontynuów węzowych 136
 twierdzenie o przedłużaniu odwzorowań w S^n z podzbiorów domkniętych wielościanów 137
 twierdzenie Borsuka o oddzielaniu punktu od nieskończoności 141
 twierdzenie Borsuka o rozcinaniu 142
 twierdzenie Jordana-Brouwera (stwierdzenie rozcinania E^n przez S^{n-1}) 144
 lemat o faktoryzacji 148
 o nieistotności odwzorowań przestrzeni zwartych metrycznych w sfery wymiaru wyższego 149
 o nierozcinaniu przestrzeni E^n przez zbiory zwarte wymiaru $\leq n-2$, 149
 twierdzenie Jordana 153
 jeziora Wady 154
 twierdzenie Schoenfliesa 156
 sinusoida zagęszczona położona inaczej 161
 zbiór Antoine'a (szkic konstrukcji) 163
 jednorodność przestrzeni ściągłych 170
 jednorodność sfer S^n , $n \geq 2$ 171
 twierdzenie o podnoszeniu dróg i homotopii dla nakrycia okręgu prostą 179—181
 niejednorodność S^1 ($\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$) 183
 zasadnicze twierdzenie algebry 184
 nieistnienie retrakcji wstęgi Möbiusa na brzeg 185
 twierdzenie (ogólne) o jedyności podniesienia 188
 twierdzenie (ogólne) o podnoszeniu dróg 189
 twierdzenie (ogólne) o podnoszeniu homotopii 190
 pewne kryterium istnienia podniesienia 192
 nieistotność odwzorowań $S^n \rightarrow S^1$, $n \geq 2$, 194
 grupa podstawowa torusa jest izomorficzna z $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 197
 nieabelowość grupy podstawowej krzywej ósemkowej 198

powierzchnia rzutowa jako rezultat sklejenia brzegami krążka i wstęgi Möbiusa 200
grupa podstawowa powierzchni rzutowej jest izomorficzna z Z_2 202
nieistnienie odwzorowań $S^2 \rightarrow S^1$ zachowujących antypodyzm 202
twierdzenie Borsuka-Ulana 204
twierdzenie Lusternika-Sznirelmana 205
twierdzenie o kanapce 206
pierwsze twierdzenie Janiszewskiego 210
drugie twierdzenie Janiszewskiego 211
o jednosprzęgłości sfer S^n , $n \geq 2$, 213
lemat Tuckera 216
twierdzenia o antypodach w dowolnych wymiarach 219

AUTORZY

Aleksandrow P. S. 56, 115, 118, 142
Alexander J. W. 39, 95, 163
Antoine L. 163
Arason J. K. 214

Bing R. H. 95, 105, 107, 108, 114, 136, 211
Blankenship W. A. 163
Bogomołowa W. 63
Bohl P. 74, 104
Bolzano B. 75
Borsuk K. 67, 75, 81, 106, 128, 129, 141, 142, 144, 204, 220
Brouwer L. E. J. 27, 61, 64, 75, 85, 88, 94, 102, 104, 112, 121, 144, 145, 154
Brown M. 39, 109

Cairns S. S. 12, 16, 109
Cantor G. 87
Carathéodory C. 158
Cauchy A. 75
Chandler B. 169
Charaziszwili A. B. 105
Coldewey H.-D. 57, 158

Connel E. H. 107
Courant R. 1, 28
Crowell R. H. 171

Dauben J. W. 87
Dawidowiczowa A. 108
Dehn M. 27, 162, 198
Denjoy A. 162
Dębski W. 98, 109
Dodson M. M. 133
Duda E. 99
Duda R. 113
Dugundji J. 105, 107, 110, 135, 214

Eilenberg S. 148, 175, 183, 210
Engelking R. 22, 108, 118
Euklides 17
Euler L. 11, 16

Fary I. 1, 35
Flores A. 2, 4, 57, 117
Fox R. H. 171
Franz W. 110

Gale D. 108
 Giblin P. J. 1, 35
 Gołubiew W. W. 163
 Gołuzin G. M. 92, 97
 Gorelik G. E. 115
 Granas A. 105, 107, 110, 135, 214
 Greenberg M. J. 171
 Griffiths H. B. 84

Hadwiger H. 109, 214
 Hahn H. 64
 Hamilton O. H. 106, 136
 Harary F. 34, 35
 Hausdorff F. 27, 153
 Henderson D. W. 114
 Hewitt E. 82
 Hierholzer C. 12
 Hilbert D. 22
 Hilton P. J. 56, 124, 169, 183
 Holsztyński W. 132, 135
 Hopf H. 155
 Hurewicz W. 109, 118

Janiszewski Z. 137, 147, 210, 211
 Jaworowski J. 61
 Jordan C. 27, 153
 Jürgens E. 87
 Juszkiewicz P. 11, 15

Kelley J. L. 22
 Kerékjártó B., on 64, 121, 123, 161, 163
 Kiełdys L. 95
 Kirkor A. 163
 Kline 162
 Knaster B. 102, 137, 155
 Knebusch M. 214
 Knill R. 107
 Kołmogorow N. 15
 Kosniowski C. 171, 202
 Krasnosielski M. A. 214
 Kuhn W. H. 108
 Kuratowski K. 34, 68, 81, 102, 105, 115, 117,
 118, 137, 147, 150, 155, 161, 163, 210
 Ky Fan 214

Lebesgue H. 61, 112
 Lefschetz S. 110, 214
 Lelek A. 95, 108
 Levy P. 155
 Lietzmann W. 12

Listing J. B. 15
 Lubański M. 155
 Lüroth J. 87
 Lusternik L. 109, 155, 156, 205

Łokuciewski O. 133, 134, 135

Magus W. 27, 169
 Mańka R. 107
 Massey W. S. 126, 165
 Mayer J. 110
 Mazurkiewicz S. 102, 149
 Menger K. 117, 118
 Mioduszewski J. 67, 98, 175
 Möbius A. F. 5, 47
 Moise E. F. 28, 57, 153
 Moore R. L. 35, 161, 162

Nagami K. 118
 Nagata J. 118
 Newman M. H. A. 41, 108, 158
 Nöbeling G. 117

Omiljanowski K. 161

Pasch M. 1, 17, 21
 Parchomienko A. S. 96
 Pasynkow B. 118
 Patkowska H. 161
 Peano G. 4
 Pears A. R. 118
 Pfister A. 214
 Pittman C. R. 35
 Poincaré H. 22, 165, 169
 Pontriagin L. 58, 117, 184
 Priwałow I. I. 158

Rademacher H. 14
 Reich S. 134
 Riedrich T. 108
 Riesz F. 64, 162
 Rinow W. 118, 138
 Robbins H. 28
 Robertsonowie A. P. i W. 45
 Rudin M. E. 129

Schirmer H. 133
 Schoenflies A. 36, 94, 154, 158

Seifert H. 121
Semadeni Z. 175
Sierpiński W. 72, 96, 98, 101
Sitnikow K. A. 99
Smart D. R. 110
Spanier E. 190
Sperner E. 77, 88, 92
Starbird M. 129
Staudt C., von 11
Steenrod N. 148, 175, 183
Steinhaus H. 33, 81, 84, 105, 108, 206
Stoilow S. 92, 94, 101
Stożek W. 108
Straszewicz S. 211
Stromberg 82
Surówka W. 108
Szaszkin Ju. A. 3, 16, 109
Sznirelman L. 84, 205

Thomassen C. 34
Threlfall W. 121
Tietze H. 63, 64
Toeplitz O. 14
Tolstowa G. 117
Tucker A. W. 214

Ulam S. 204
Urbanik K. 83
Urysohn P. 63, 64, 149, 155

Veblen 27, 153
Vogt E. 2, 57, 158

Wallman H. 109, 118
Walt T., van der 107, 110
Waraszkiewicz Z. 136
Weiss B. 214
Whyburn G. T. 123, 212
Wilkoś W. 151, 210
Wiweger A. 62, 175
Wylie S. 56

Yoneyama K. 154

Zeeman E. G. 61, 171
Zieschang H. 57, 158

Redaktor
GRAŻYNA WOJDAŁA

Redaktor techniczny
ALICJA ZAJĄCZKOWSKA

Korektor
WŁODZIMIERZ DOBRZAŃSKI

Copyright © 1994
by Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego
Wszelkie prawa zastrzeżone

Wydawca
Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego
ul. Bankowa 12B, 40-007 Katowice

Wydanie I. Nakład 1500 + 50 egz. Ark. wyd. 21,0. Ark. druk.
14,5. Papier offset. kl. III 80 g, 70 × 100. Oddano do skła-
dania w sierpniu 1994 r. Podpisano do druku w grudniu
1994 r.

Zam. 426/94

Cena 65 000 zł (6 zł 50 gr)

Drukarnia Uniwersytetu Śląskiego
ul. 3 Maja 12, 40-096 Katowice

Jerzy Mioduszewski

Wykłady z topologii. Topologia przestrzeni euklidesowych

Wykaz ważniejszych błędów dostrzeżonych w druku

Strona	Wiersz		Jest	Powinno być
	od góry	od dołu		
13		16	K i b	K i L
32	podpis pod rys. 24		Nie ma trzeciego obszaru	Nie ma jeszcze jednego obszaru
38		6/7	z obwodu wielokąta W' na czworokąt M .	z obwodu wielokąta W'' do homeomorfizmu W'' na czworokąt N .
39	3/4		i $h(y)0$. Ten homeomorfizm przedłużamy	i $h(y)0$ przedłużamy
51	7		retrakcją przypisującą	odwzorowaniem przypisującym
51	13/14		Retrakcję $r: E^n \rightarrow \Delta^n$, która będzie nazywana <i>kanoniczną</i> , można	Odwzorowanie $r: E^n \rightarrow \Delta^n$, które będzie nazywane <i>retrakcją kanoniczną</i> , można
59		11	$K^0 \rightarrow K^0$	(skreślić)
59		9	K w L .	$K' \rightarrow L$.
106		14/15	większej niż ε . <i>Kontinua węzowe</i> ...	większej niż ε . Można dowieść, że kontinua węzowe...
163	10/13		zaczepione o T , jak na rys. 108, które... nie będziemy przeprowadzać.	zaczepione o T , które w tym dopełnieniu nie są deformowalne do punktu; mówi się też, że dopełnienie tego zbioru — nazywanego <i>zbiorem Antoine'a</i> — ma nietrywialną grupę podstawową.
163	podpis pod rys. 108		Łuk Antoine'a	Zbiór Antoine'a
215	4		ono	on
230	6		Magus W.	Magnus W.

Cena 65 000 zł (6 zł 50 gr)

ISSN 0239-6432